EPFL

Cours Électrotechnique I :

2. Conventions et symboles :

→ concepts

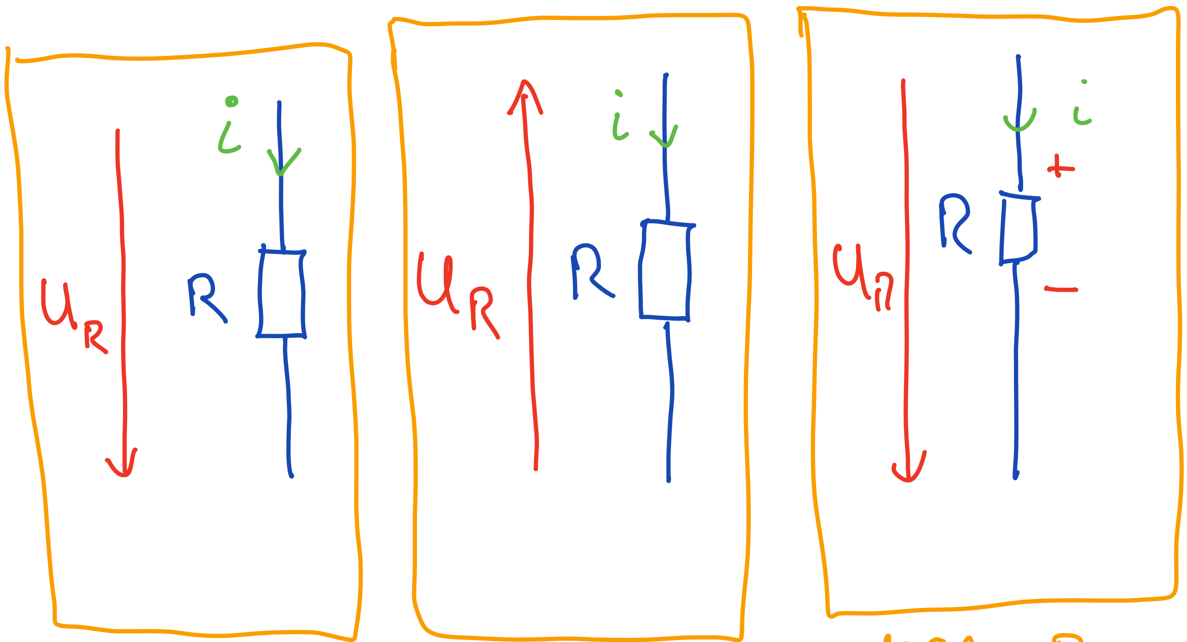
Ex : Courant : i, I, $\hat{I}$, $\hat{i}$, $\bar{I}$, $\underline{\underline{I}}$

unité : [A]

Relations : $U = R \cdot I$

$u = R \cdot i$

Choix : Convention Moteur



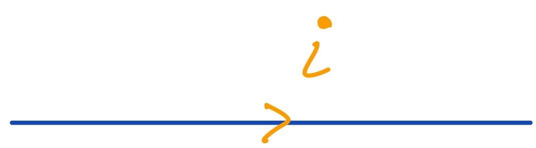
International France USA, B

$P_R = R \cdot I^2 = UI$ = positive

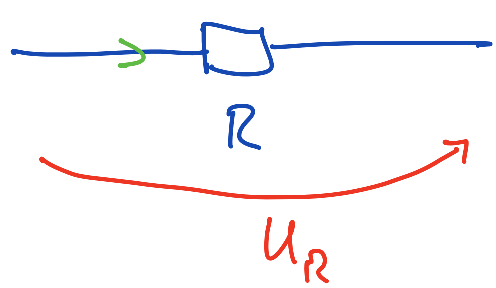
2.2 Représentation graphique :

Conducteur parfait :

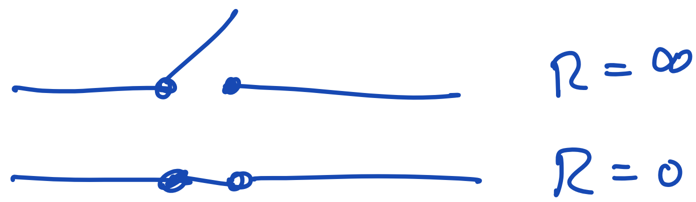
Conducteur avec un courant :



Elément :



Interrupteur :

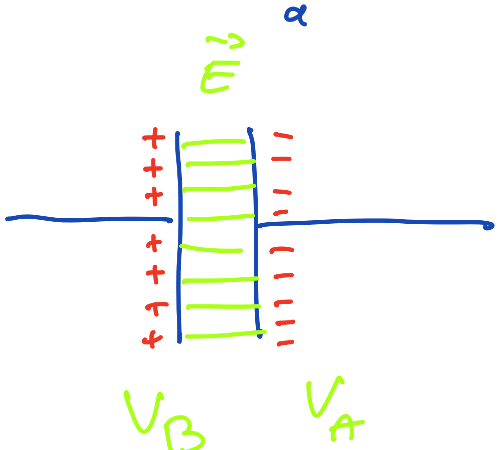


3. Lois fondamentales :

Champ électrique :

Différence de potentiel électriques

$$V_A - V_B = \int_a^b E\, dl = U_{ab}$$



capacité

3.2.19 La Capacité :

Définition : Charge électrique : Q

capacité : $C = \dfrac{Q}{U_{ab}}$ $[F]$ (Farad)

Symbole :

3.3 Courant électrique :

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad [A]$$

j = Densité de courant $[A/m^2]$

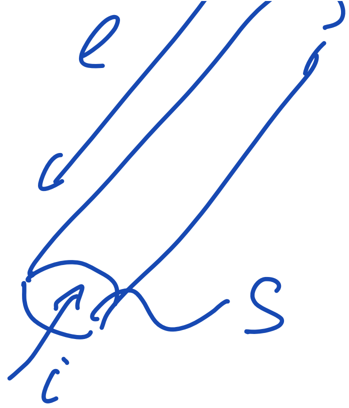
3.34 Pertes Joule

$$P = R \cdot I^2 \quad [W]$$

$$P = \rho \int_V j \, dV_{cu}$$

3.3.6 Résistance :

$$R_{ab} = \int_a \rho \, \frac{dl}{S}$$



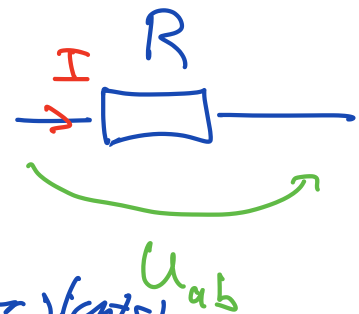
Résistivité $[\Omega \, m]$

Si on a un milieu homogène et S est cste :

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} \quad [\Omega]$$

3.3.8 Loi d'Ohm :

$$U_{ab} = R_{ab} \cdot I$$



(Tension et le courant sont constants)

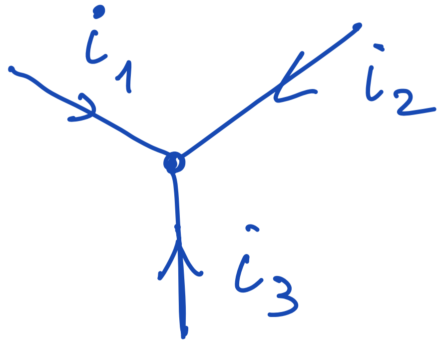
$$u_{ab} = R_{ab} \cdot i$$

(Tension et le courant sont variables)

3.3.11 Lois de Kirchhoff :

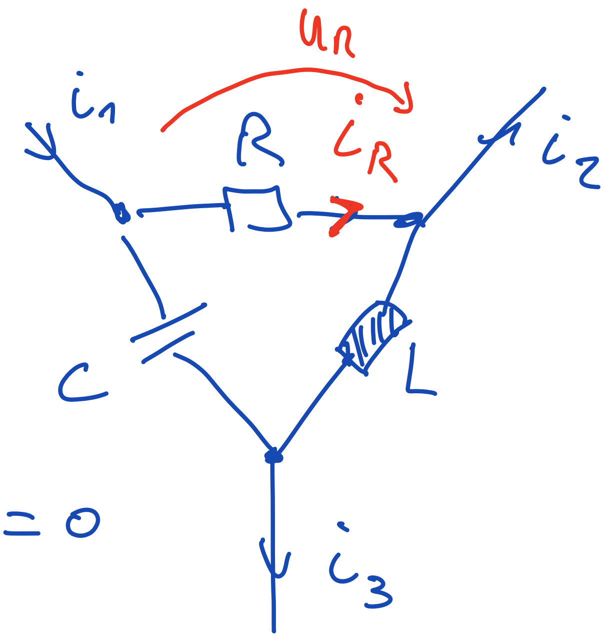
Noeud : Pt de convergence d'au moins 3 conducteurs

$$\underline{\sum_j i_j = 0}$$



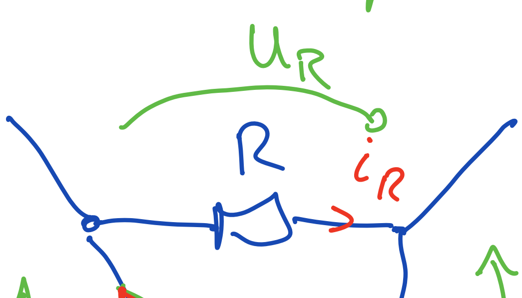
$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Noeud généralisé :



$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

Maille : Ensemble de branche partant d'un noeud pour y revenir



$$\sum_j U_j = 0$$

$$U_R - U_L + U_c = 0$$

3.4 Inductance :

$$u = L \frac{di}{dt} \qquad / \qquad \vec{Rot}\,\vec{H} = \vec{J} \qquad \vec{Rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Crée une tension en fonction de la variation du courant

3.5 La Capacité

$$C = \frac{Q}{U_{ab}}$$

$$Q = \int i \, dt$$

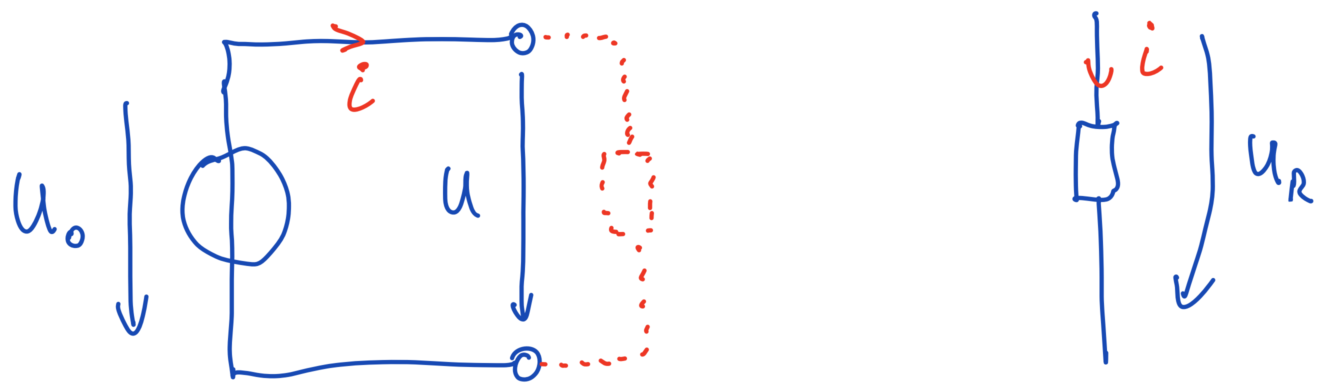
$$u_{ab} = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

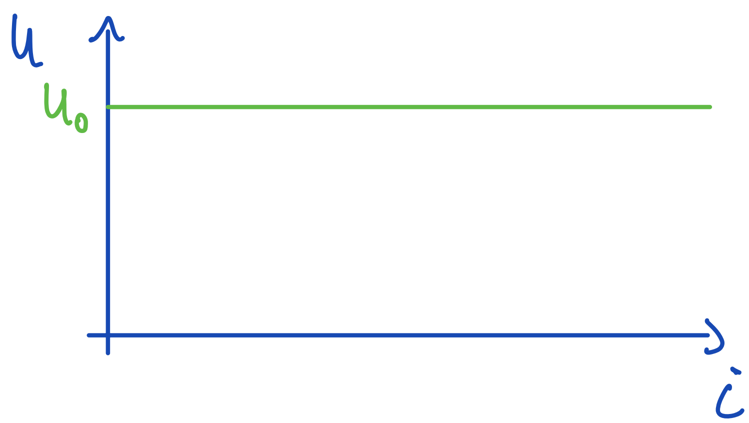
4. Eléments de circuit :

4.1 Définition : Dipôle : circuit qui possède 2 bornes

4.2 Sources de tension et courant :

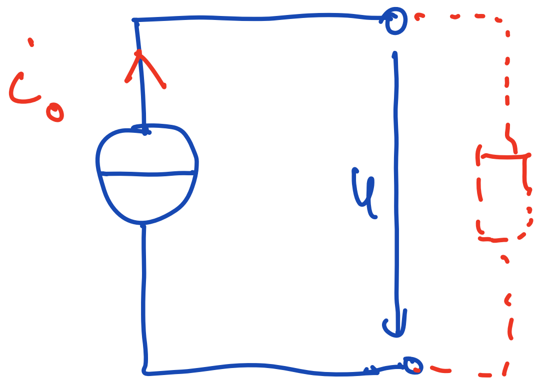
a) Source de tension idéale :



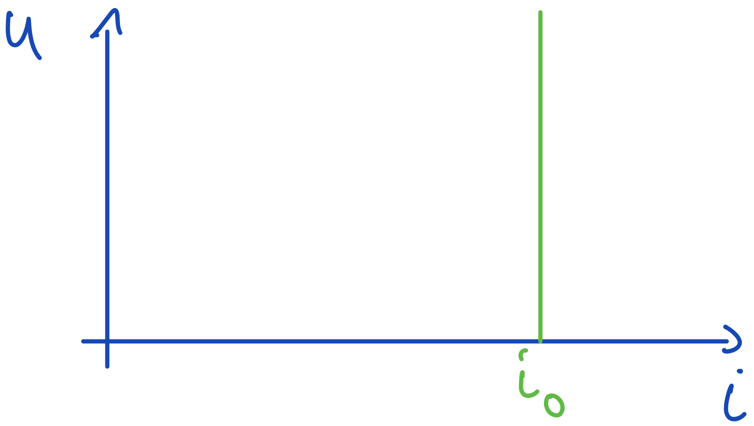


c'est un élément virtuel et inexistant dans la nature

b) Source de courant idéale :

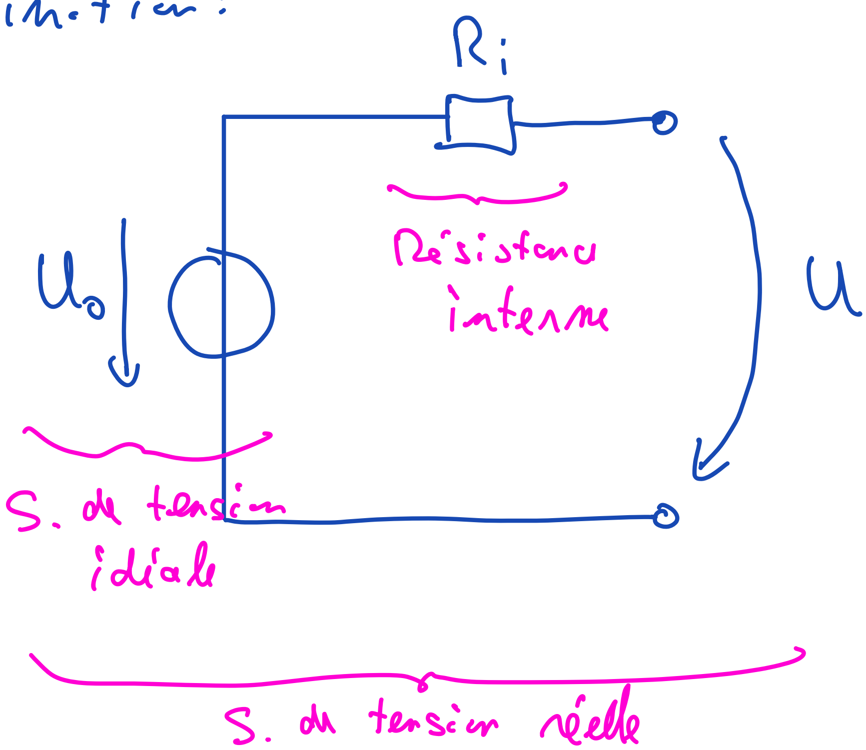


élément idéal inexistant dans la nature



4.2.5 Source de tension réelle :

Définition :



U_0 : Tension à vide (pas de charge connecté)

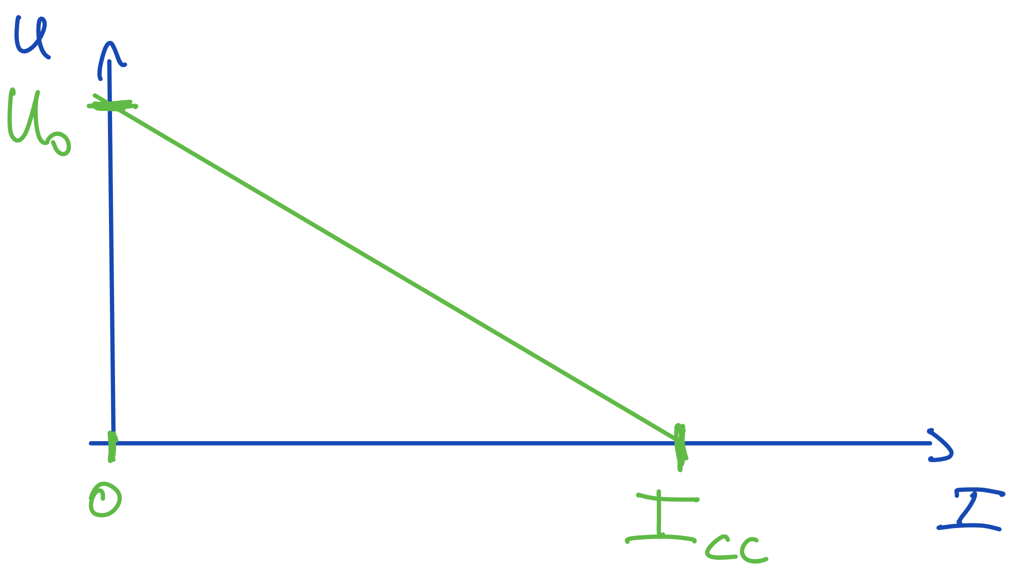
R_i : Résistance interne

U : Tension de la source réelle

$$\sum U = 0$$

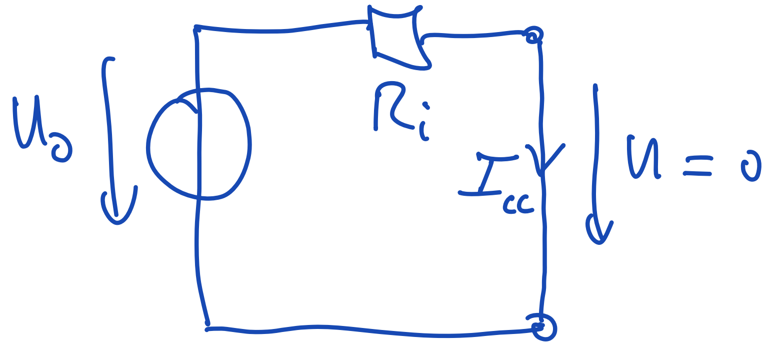
$$\rightarrow \quad -U_0 + R_i \cdot I + U = 0$$

$$\boxed{U = U_0 - R_i I}$$



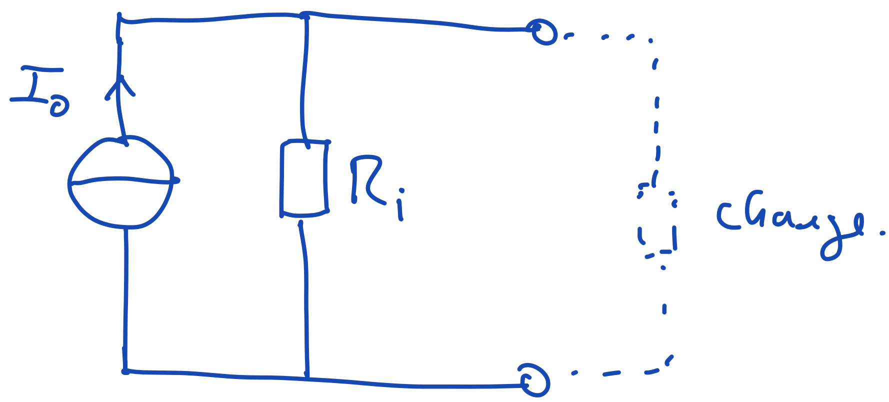
I_{cc} = courant - court circuit

Si on est en court-circuit :

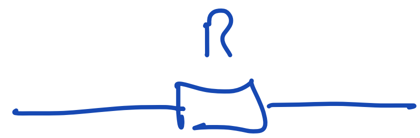


$$I_{cc} = \frac{U_0}{R_i}$$

4.2.6 Source de courant réelle :



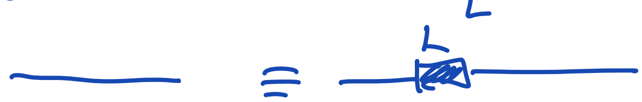
4.3 Eléments de base :

Résistance : 

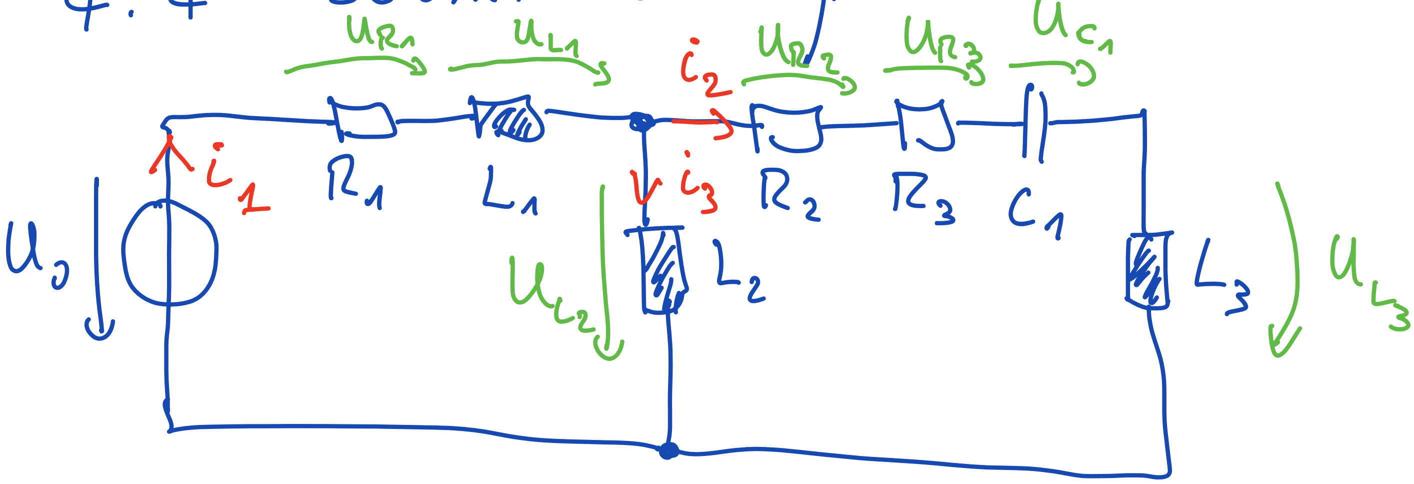
Inductance : 

capacité : 

Rappel : $u_L = L \frac{di}{dt}$ en continue $u_L = 0$

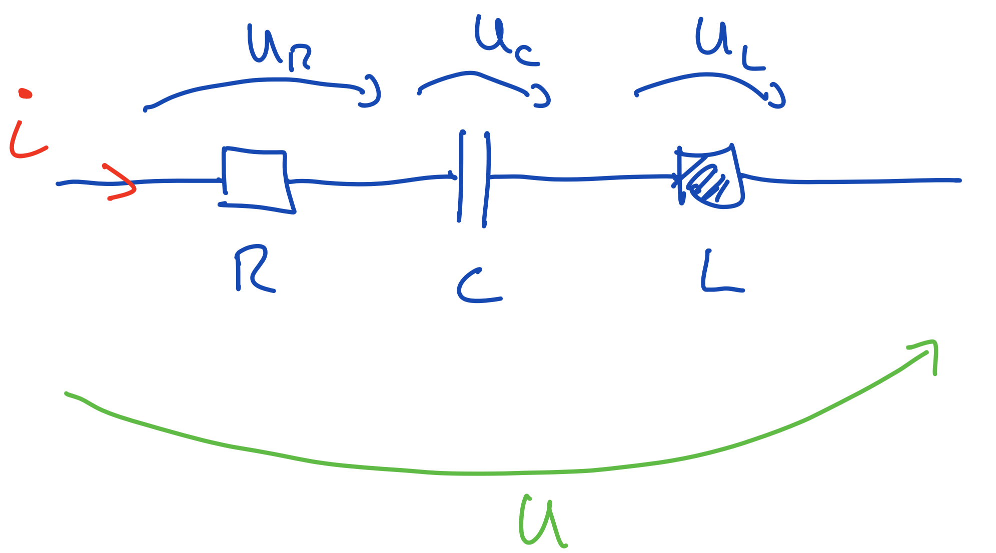


4.4 Schéma électrique :



5. Combinaison simple d'éléments linéaires

5.2 Mise en série :

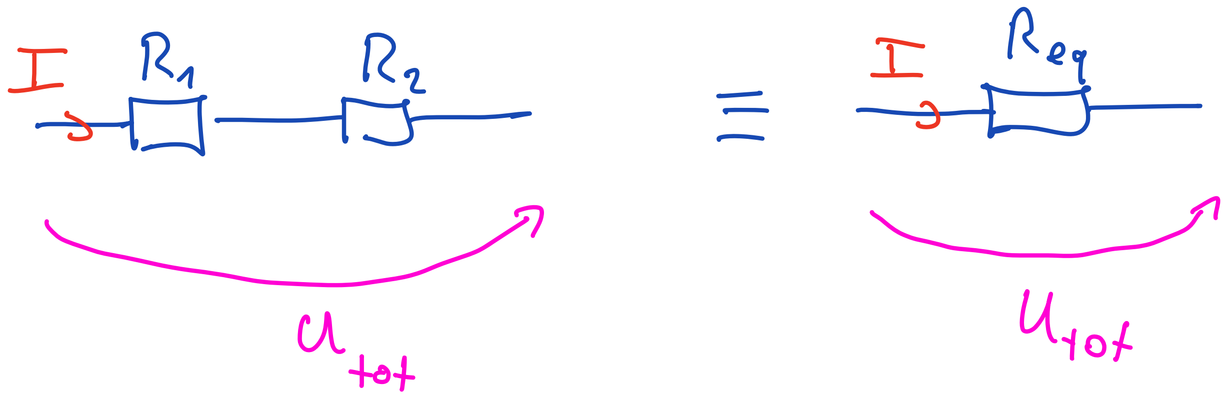


Série : parcouru par le même courant

$$i_R = i_C = i_L$$

$$u = u_R + u_C + u_L$$

5.2.2 Mise en série de R :



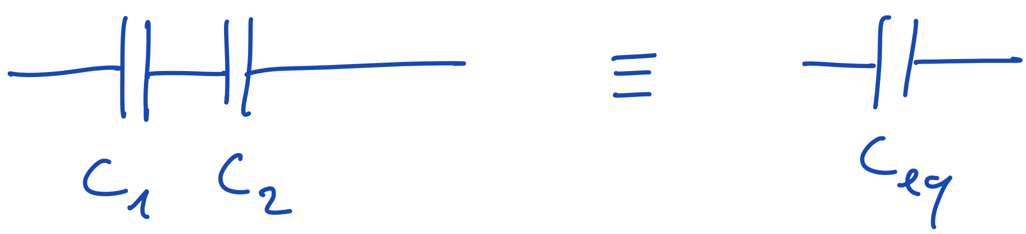
$$U_{tot} = U_{R_1} + U_{R_2} \qquad U_{tot} = U_{R_{eq}}$$

$$= R_1 \cdot I + R_2 \cdot I$$

$$U_{tot} = \underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{eq}} \cdot I$$

Série $\quad R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k \quad$ (n = nb de R en série)

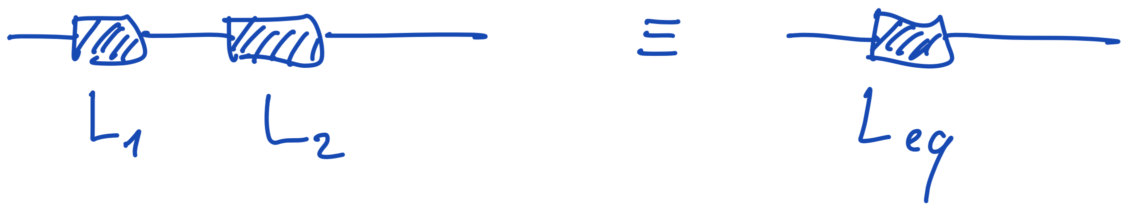
5.2.3 Mise en série des C



Série $\quad C_{eq} = \frac{1}{\sum^{n} 1} \quad$ (n = nb de C)

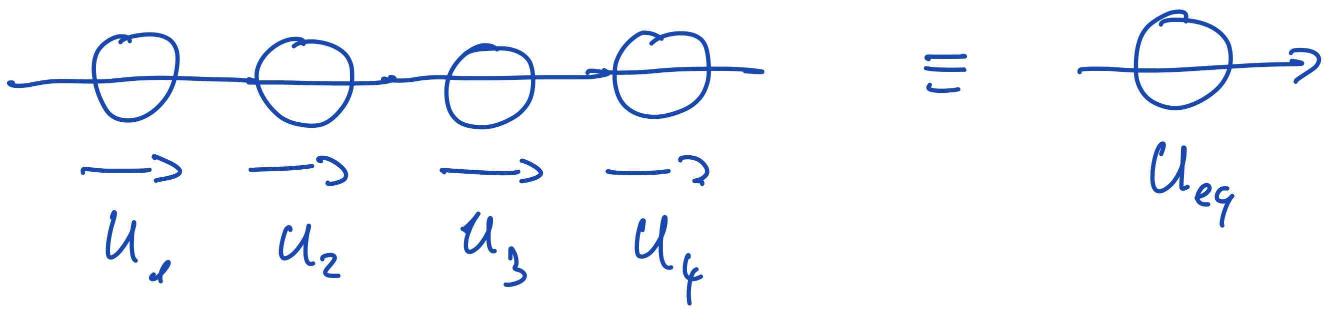
$$\sum_{k=1} \frac{1}{C_k}$$

5.2.6 Mise en série des L

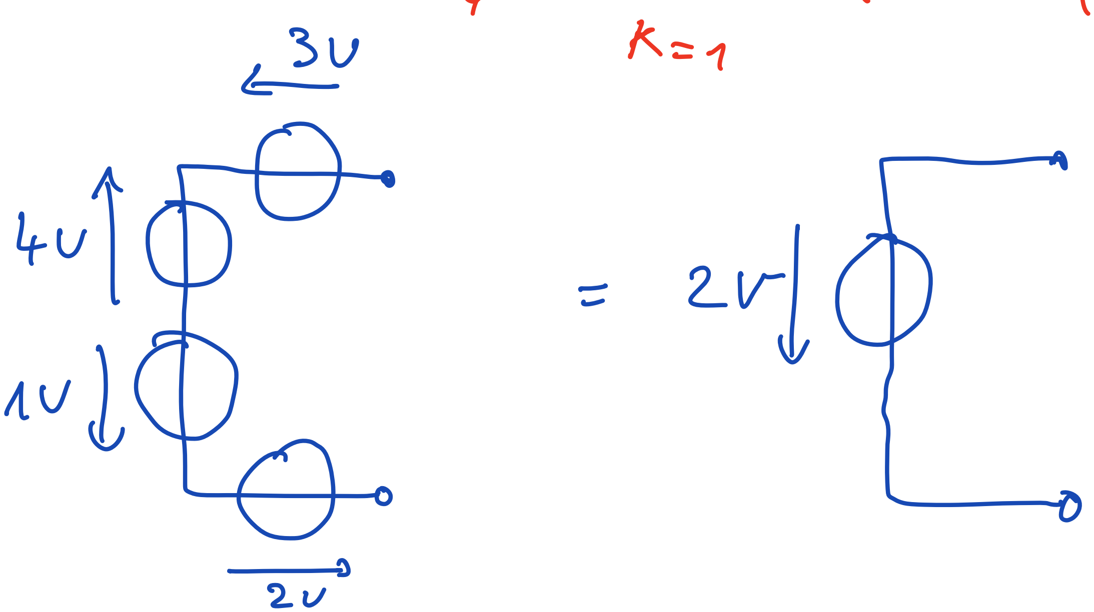


Série : $L_{eq} = \sum_{k=1}^{n} L_k$ (n = nb de L)

5.2.7 Mise en série des source de tension :



Série $U_{eq} = \sum_{k=1}^{n} U_k$ (n sources)

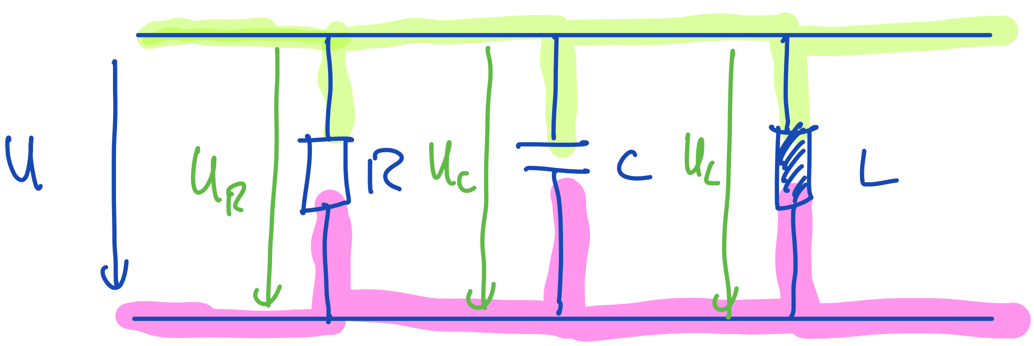


5.2.9 Mise en série des sources de courant

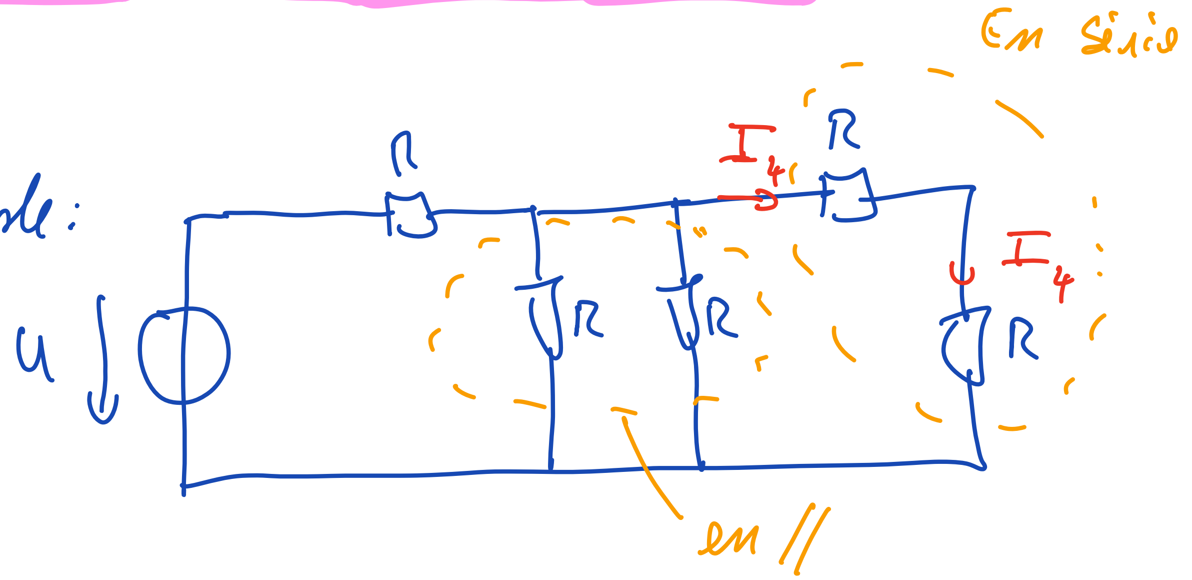
$\Rightarrow$ Impossible sauf si toutes les sources ont la même valeur !

5.3 Mise en parallèle :

Définition : Toutes les bornes des éléments sont au même potentiel



Exemple :



5.3.2 Mise en // des R :

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R_k}} \qquad m = \text{nb de } R$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

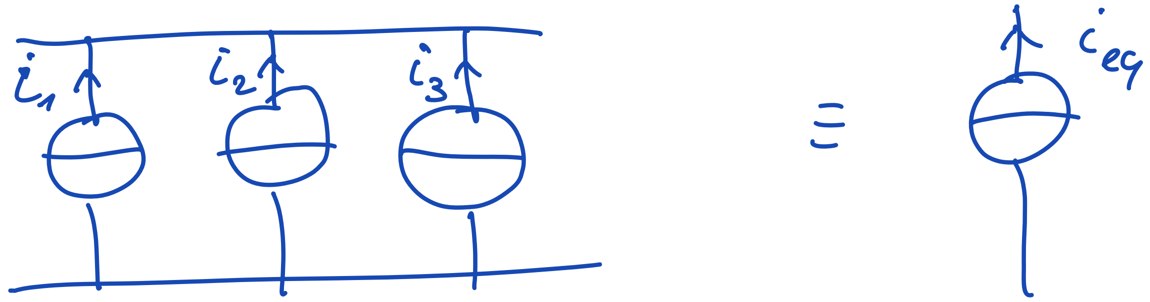
5.3.5 Mise en // des C :

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^{m} C_k \qquad m = \text{nb de } C$$

5.3.6 Mise en // des L :

$$L_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{L_k}} \qquad m = \text{nb de } L$$

5.3.7 Mise en // des sources de courant.

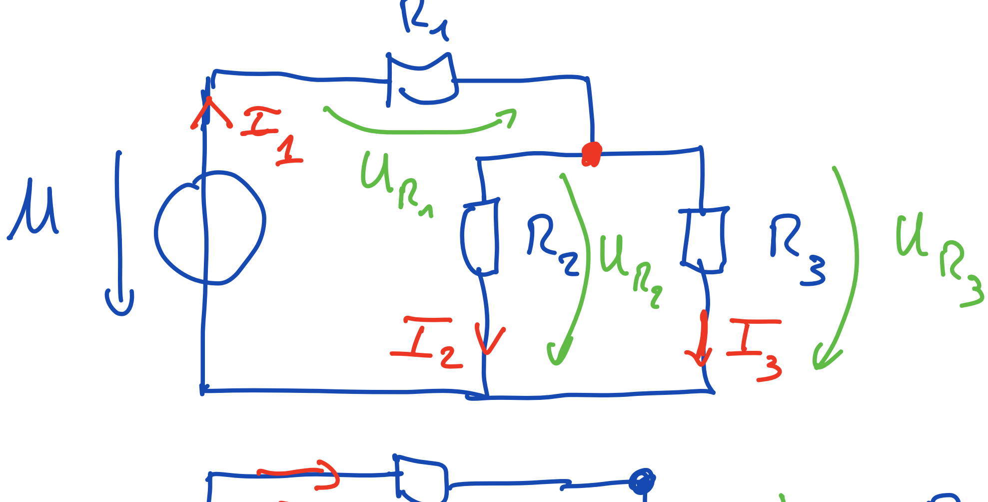


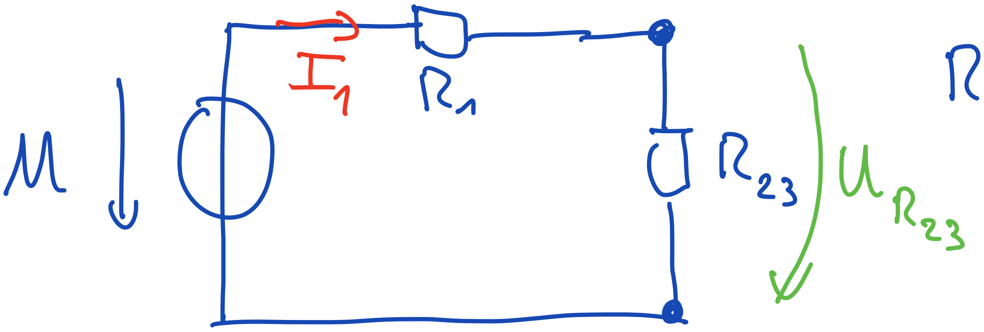
$$i_{tot} = i_{eq} = \sum_{k=1}^{m} i_k$$

Mise en // des sources de tensions est impossible ! Sauf si toutes les tensions ont même valeur !

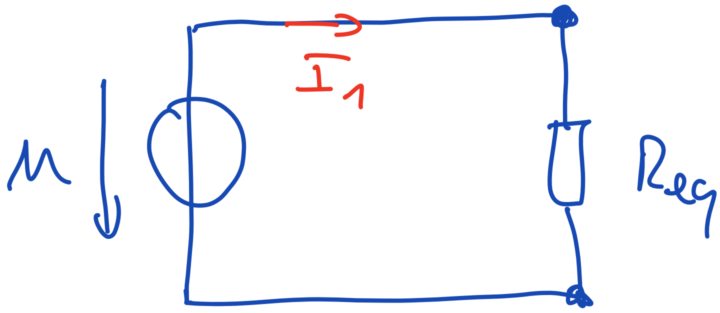
5.4 Circuits combinés :

$I_1 = I_2 + I_3$





$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$



$$R_{eq} = R_1 + R_{23}$$

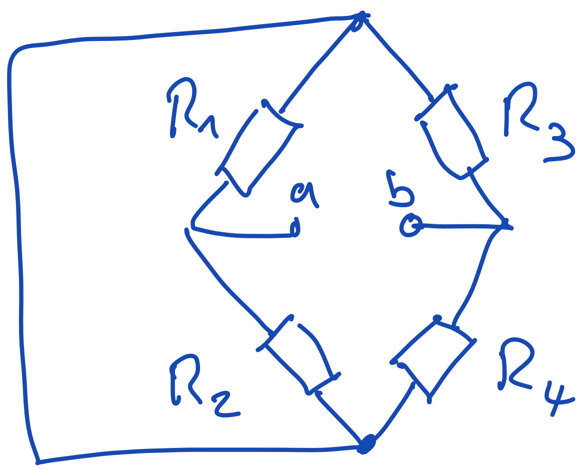
$$U = R_{eq} \cdot I_1 \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{U}{R_{eq}}$$

$$U_{R_1} = U_{R_3} = U_{R_{23}}$$

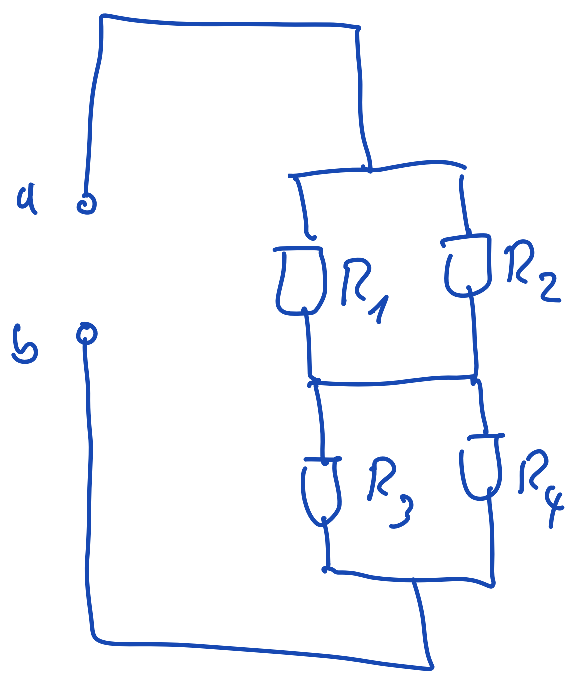
$$U_{R_{23}} = R_{23} \cdot I_1 = U_{R_2}$$

$$I_2 = \frac{U_{R_2}}{R_2}$$

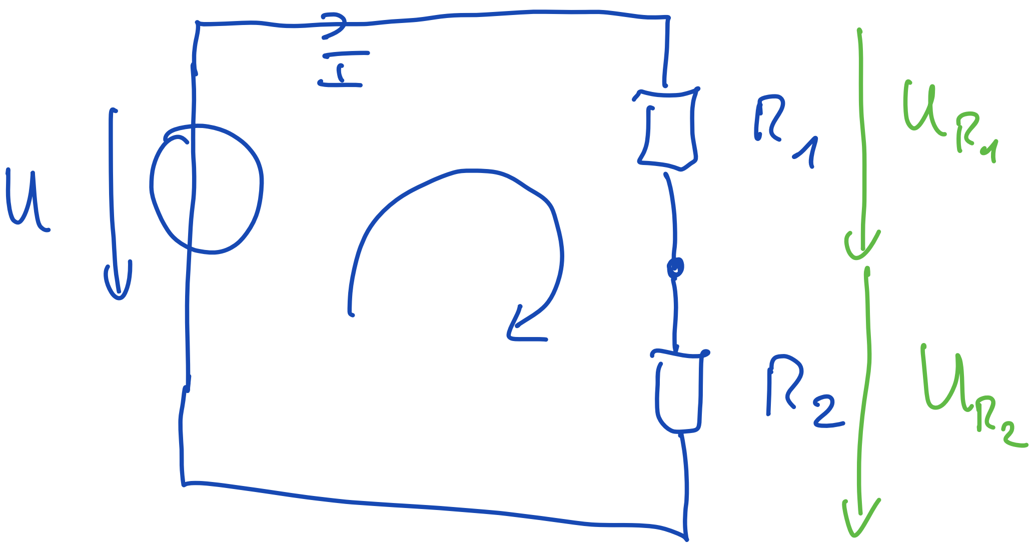
5.4.3 Exemple :



$\equiv$



5.5.1 Diviseur de tension :



$$-U + U_{R_1} + U_{R_2} = 0$$

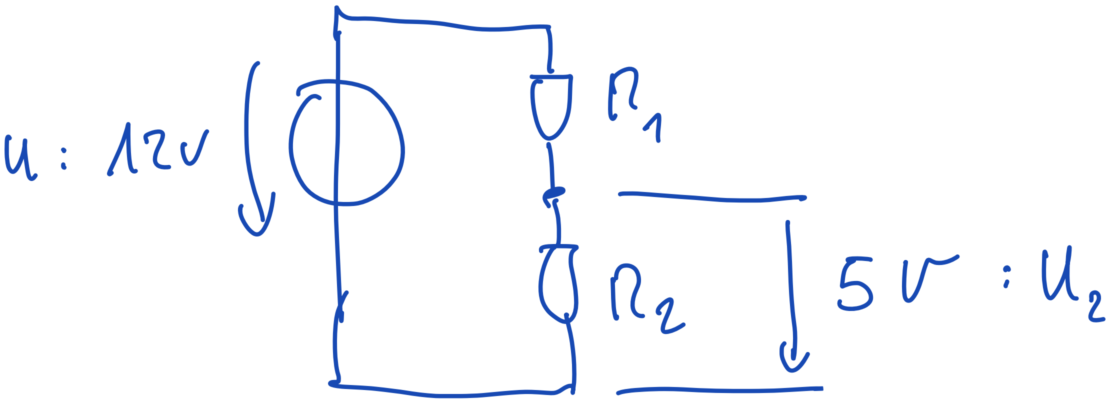
$$U = U_{R_1} + U_{R_2}$$

$$U = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = (R_1 + R_2) I$$

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$U_{R_2} = R_2 \cdot I = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_{R_1} = R_1 \cdot I = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

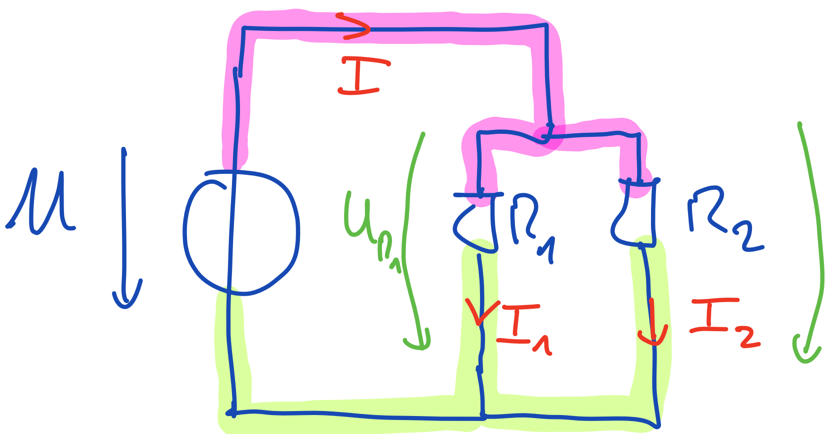


$$U_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U$$

$$5 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot 12 \quad \Rightarrow \quad 5 R_1 = 7 R_2$$

$$R_1 = 100\ k\Omega$$
$$R_2 = 71{,}5\ k\Omega$$

5.5.4 Diviseur de courant:



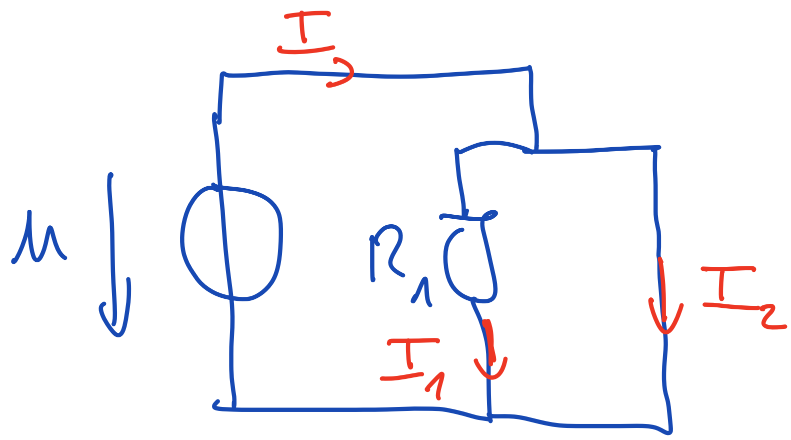
$$U_{R_2} = U_{R_1} = U$$

$$I = \frac{U}{R_{eq}} \qquad R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$u = u_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I = R_2 \cdot I_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_2 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I \\ I_1 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I \end{aligned}}$$

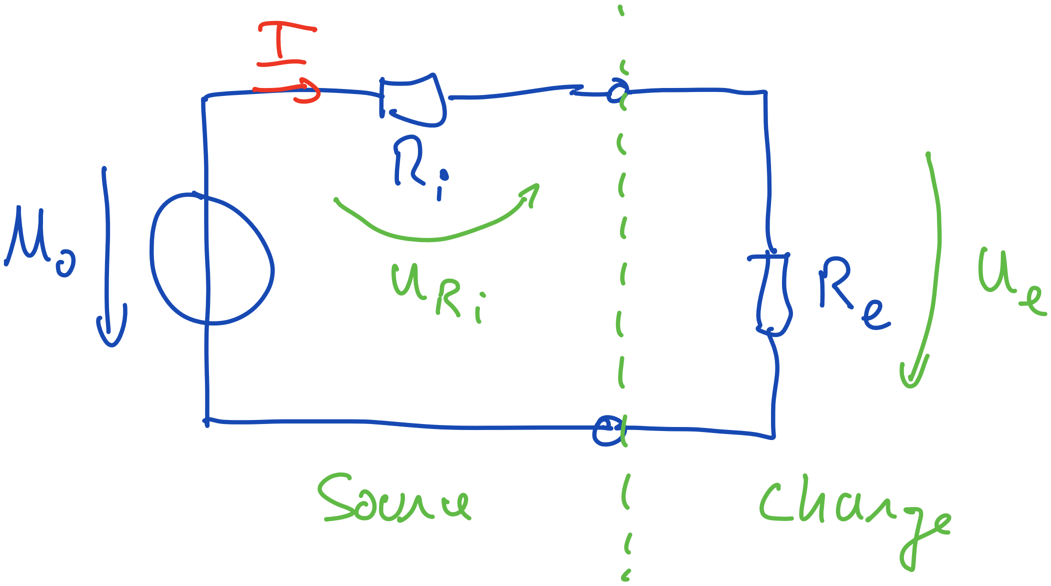
Si



5.6 Méthodes de Résolution :

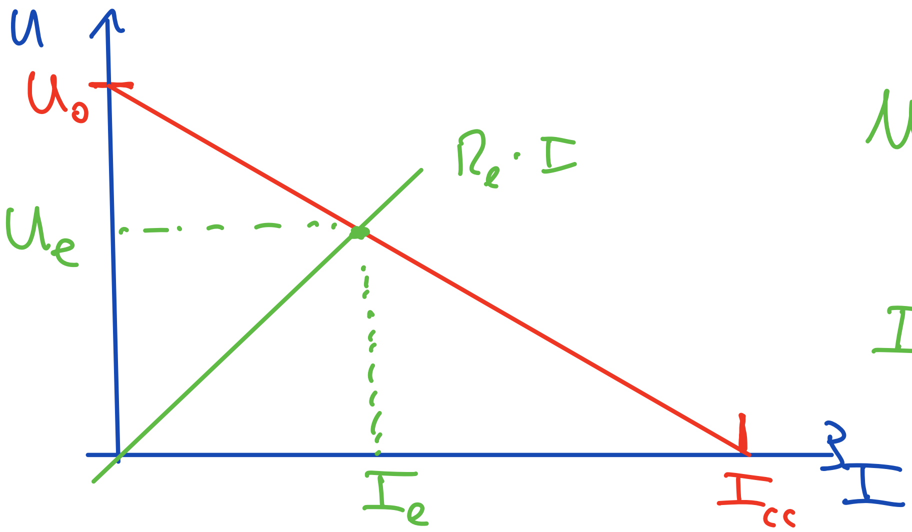
- Redessiner le schéma
- Définir toutes les grandeurs (u, I, i)
- " les sens
- Réduire le schéma
- Analyse

5.6.2 Source de tension réelle :



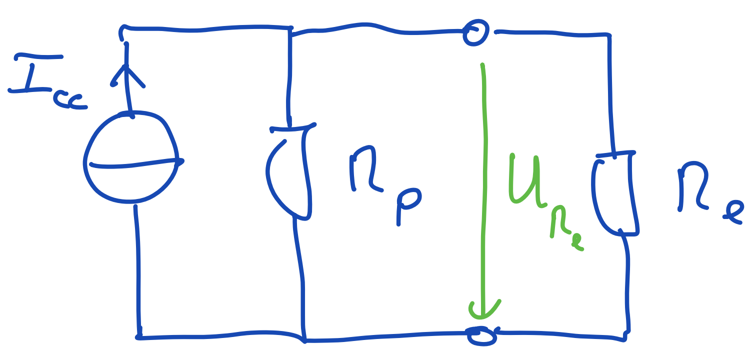
$$U_e = U_0 - U_{R_i} = U_0 - R_i \cdot I$$

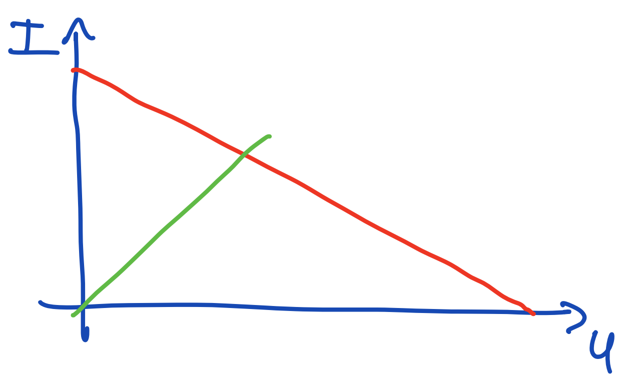
$$U_e = \qquad = R_e \cdot I$$



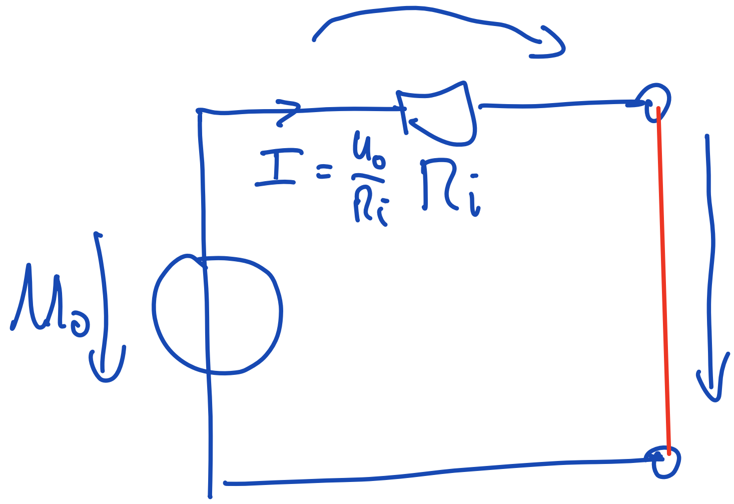
$$U_e = U_0 \cdot \frac{R_e}{R_e + R_i}$$

$$I_e = \frac{U_0}{R_i + R_e}$$

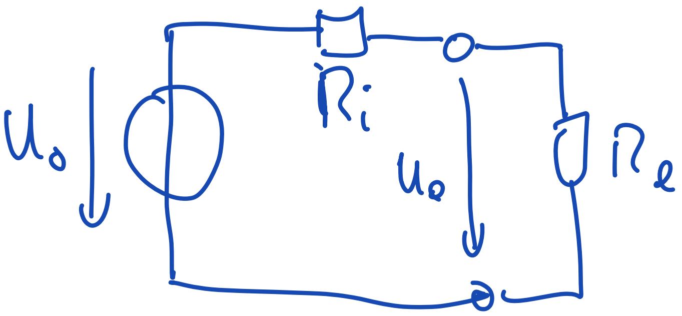


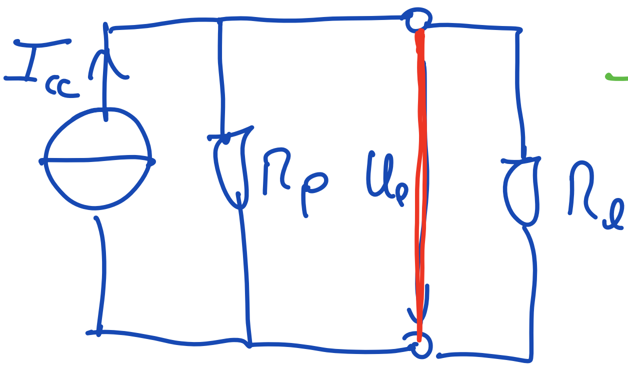


5.6.3 Equivalence des sources de tension et courant



$U = 0$





court-circuit	circuit ouvert (pas de R_e)
$R_e = 0$	
$U_{e_{cc}} = 0$	$U_{e_o} = U_o$
$I_{cc} = \frac{U_o}{R_i}$	
$I_{e_{cc}} = I_{cc}$	$U_{e_o} = R_p I_{cc}$
$U_{e_{cc}} = 0$	

On pose $U_{e_o} = R_p I_{cc} = U_o$

$$I_{cc} = \frac{U_o}{R_i} = I_{e_{cc}}$$

$$\boxed{R_p = \frac{u_0}{I_{cc}} = \frac{u_0}{u_0/R_i} = R_i}$$

En résumé :

5.7 THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON
5.8 PRINCIPE DE SUPERPOSITION
5.9 TRANSFORMATION Π-T
5.11 PUISSANCE MAXIMALE ET ADAPTATION
BILAN

Électrotechnique I
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

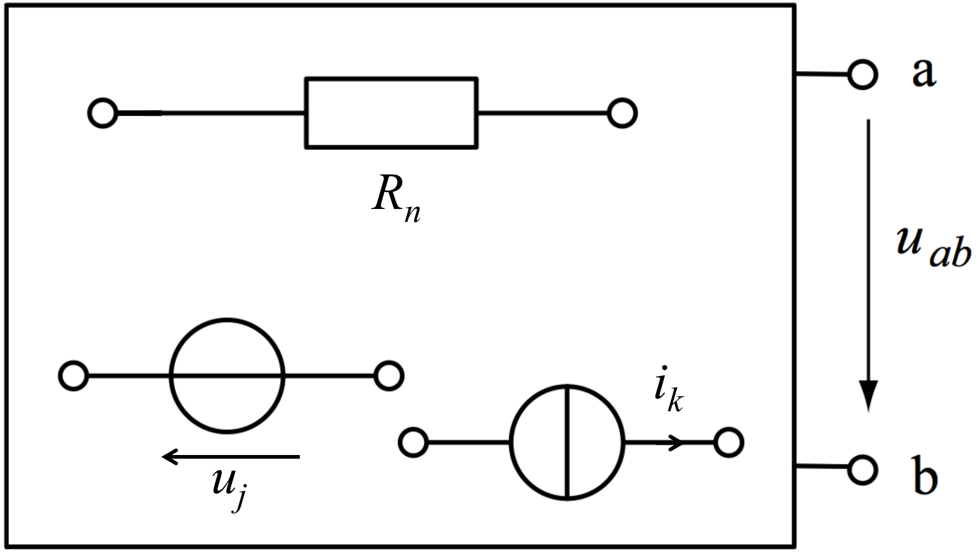
5.7 THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON

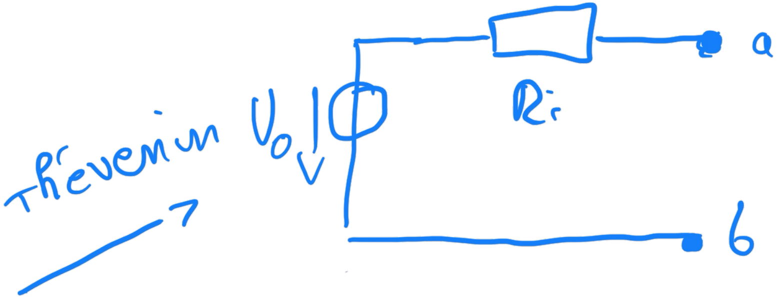
CIRCUITS ÉQUIVALENTS

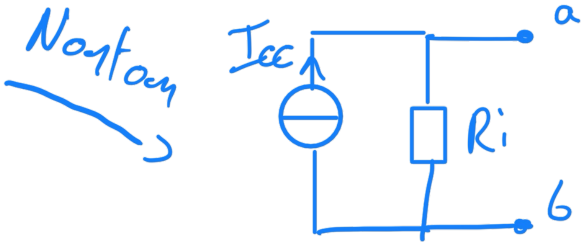
Électrotechnique I
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

5.7 THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON

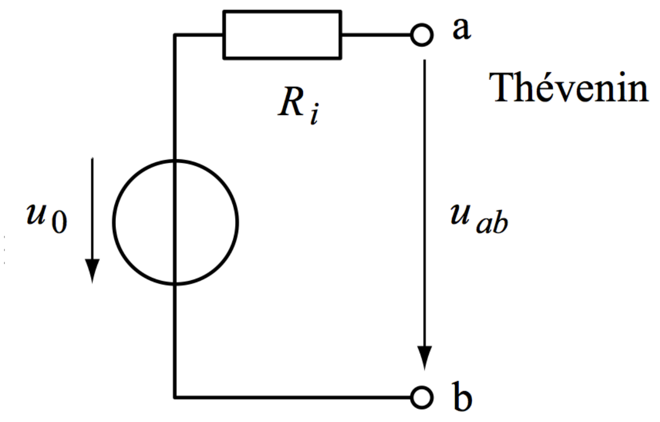
Définitions

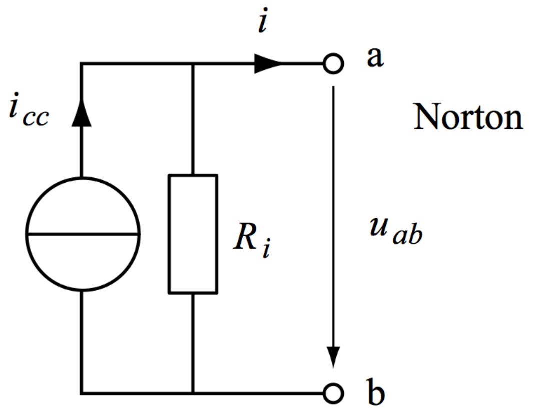






Tension à vide – Courant de court-circuit – Résistance interne





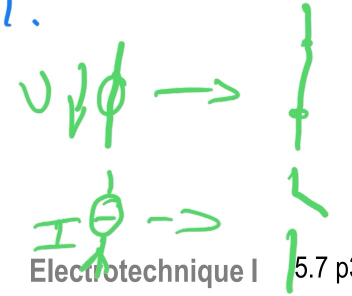
* U_0 = tension à vide

$U_0 = U_{ab} \Big|_{\substack{\text{à vide} \\ I_{ab}=0}}$

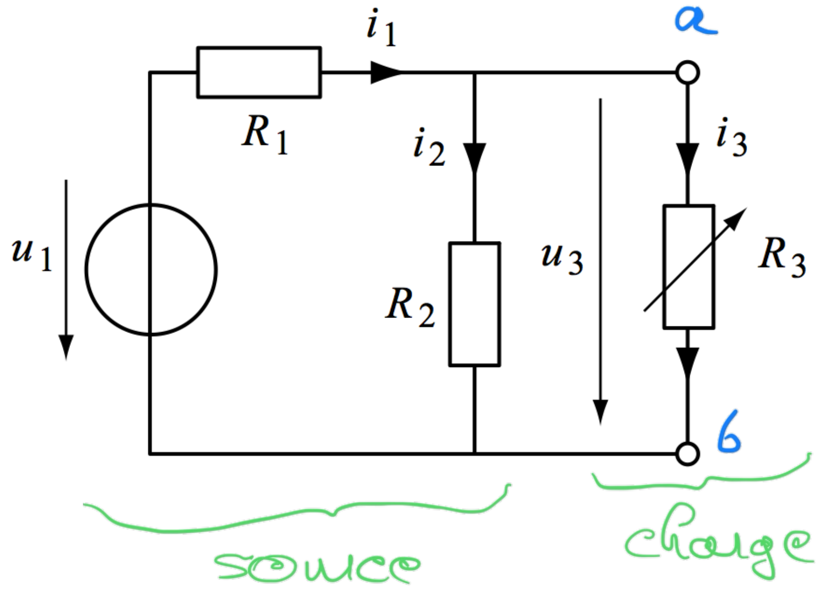
* $I_{cc} = I_{ab} \Big|_{\substack{U_{ab}=0 \\ \text{en court. circuit.}}}$

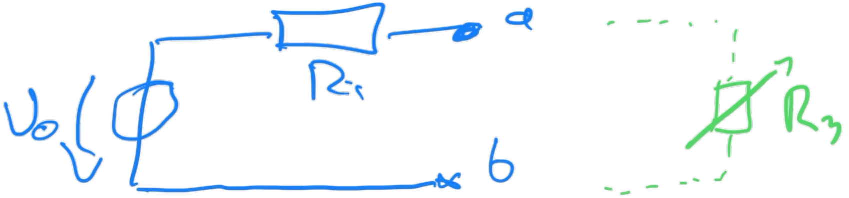
* $R_i = \dfrac{U_0}{I_{cc}} = R_{ab} \Big|_{\substack{U_j=0 \\ i_k=0}}$

Annuler les sources

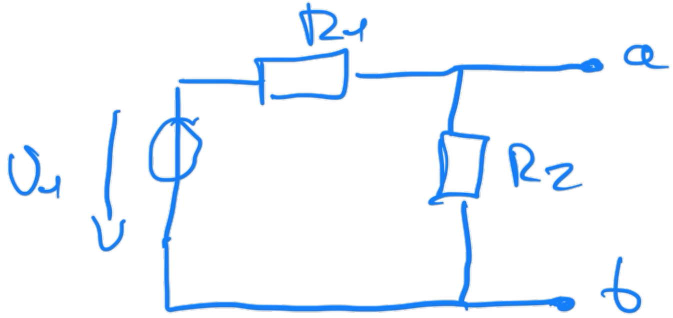


Exemple





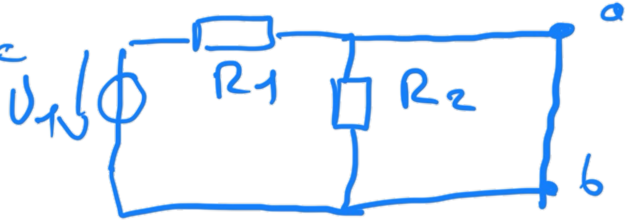
* Tension à vide



$U_{R2} = U_0$

$$U_{R2} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} U_1$$

* I_{cc}

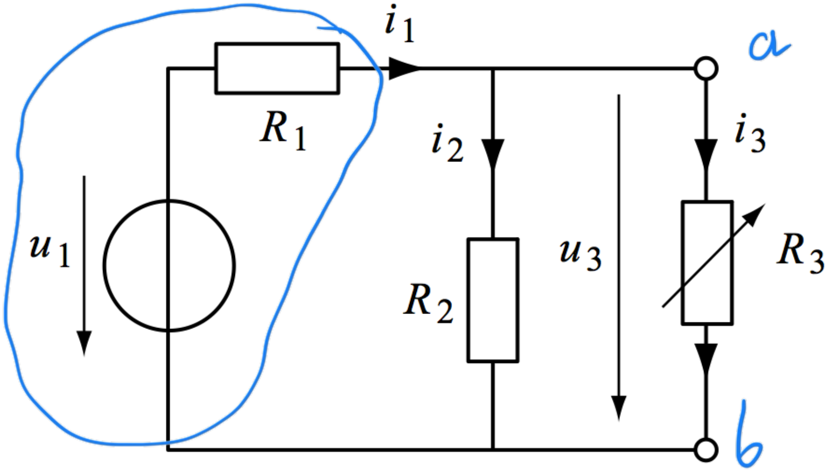


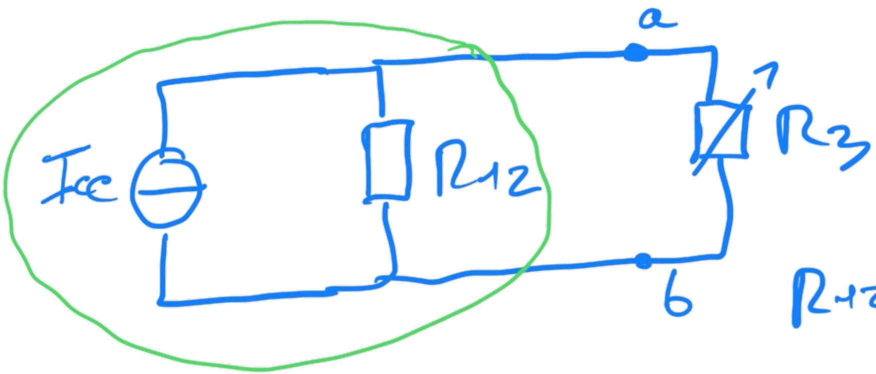
$$I_{cc} = \frac{U_1}{R_1}$$

* $$R_i = \frac{U_0}{I_{cc}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

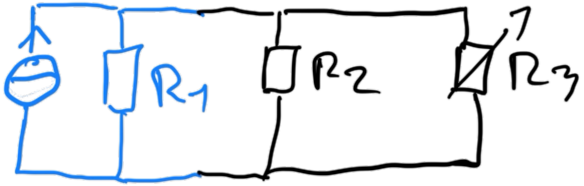
EPFL

Autre possibilité

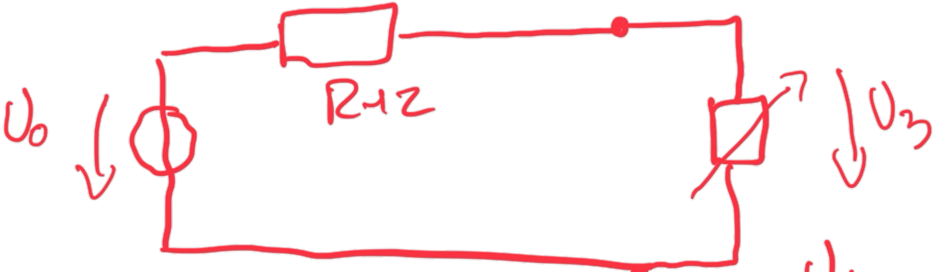




$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

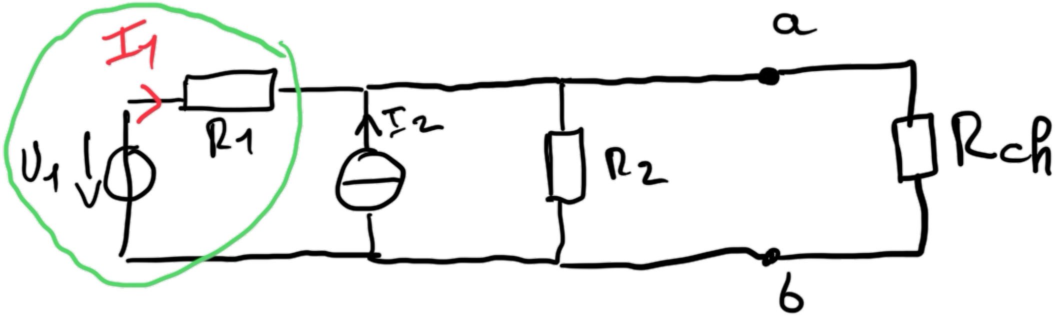


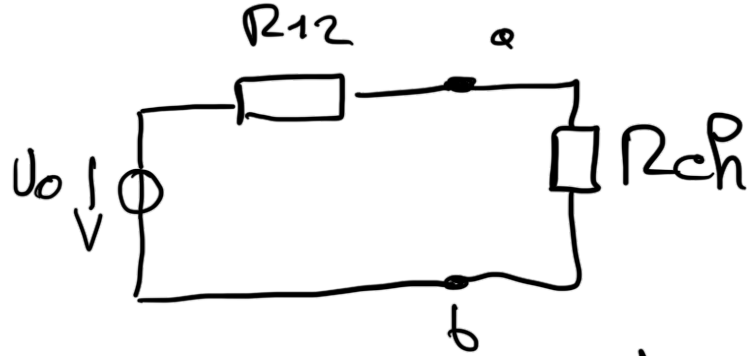
$$I_{cc} = \frac{U_1}{R_1}$$



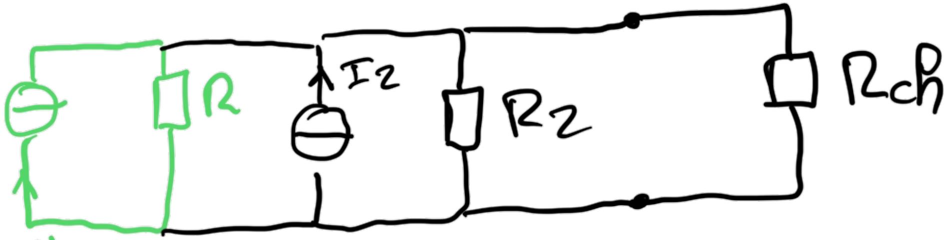
$$U_0 = R_{12} I_{cc} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{U_1}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1$$

Autre exemple

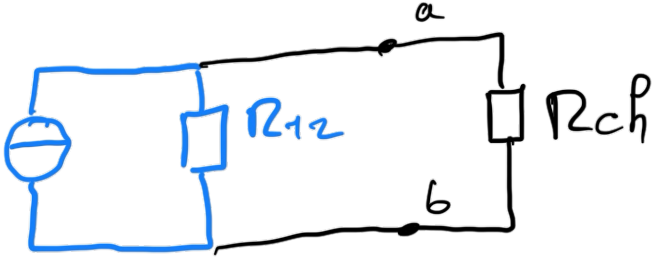




$$U_0 = R_{12}\left(\frac{U_1}{R_1} + I_2\right)$$



$$I_{cc} = \frac{U_1}{R_1}$$



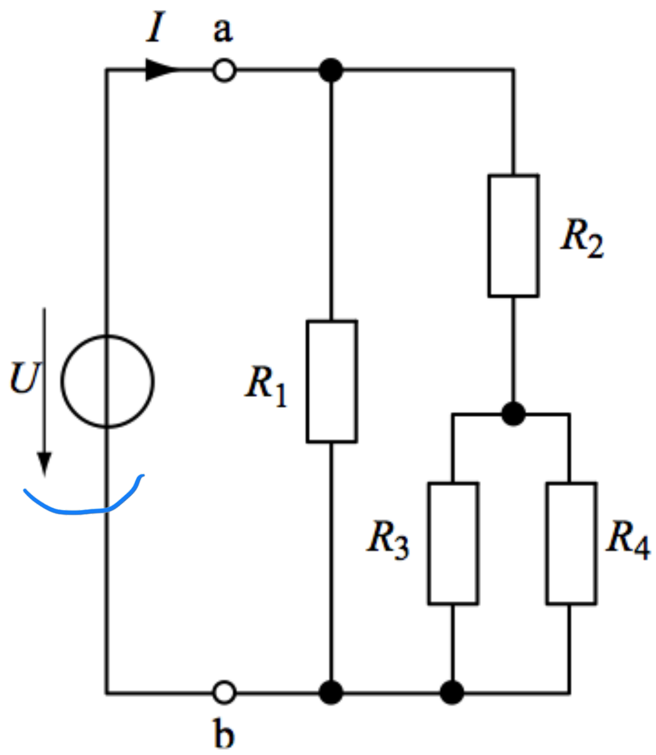
$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad \frac{U_1}{R_1} + I_2$$

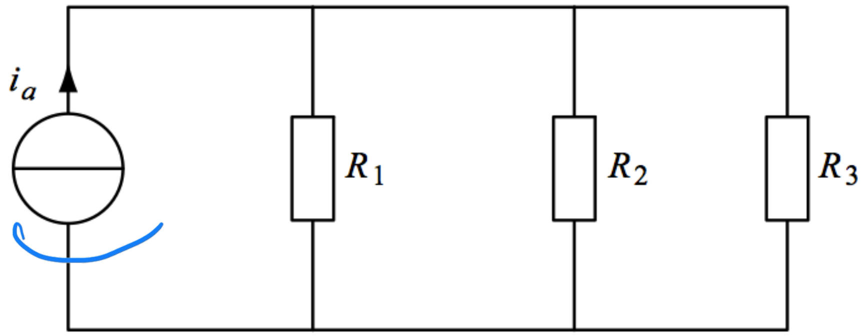
5.8 PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Électrotechnique I

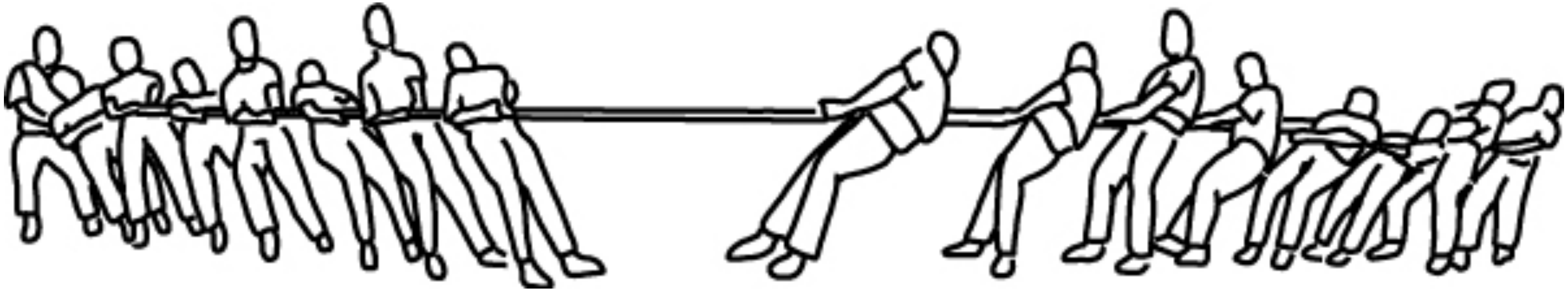
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

Excitation d'un circuit et réponse du circuit à une excitation

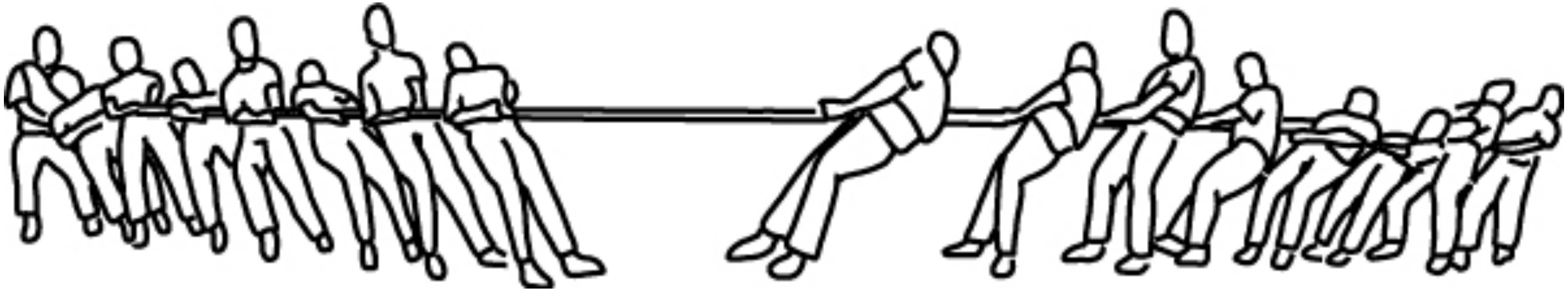




Énoncé

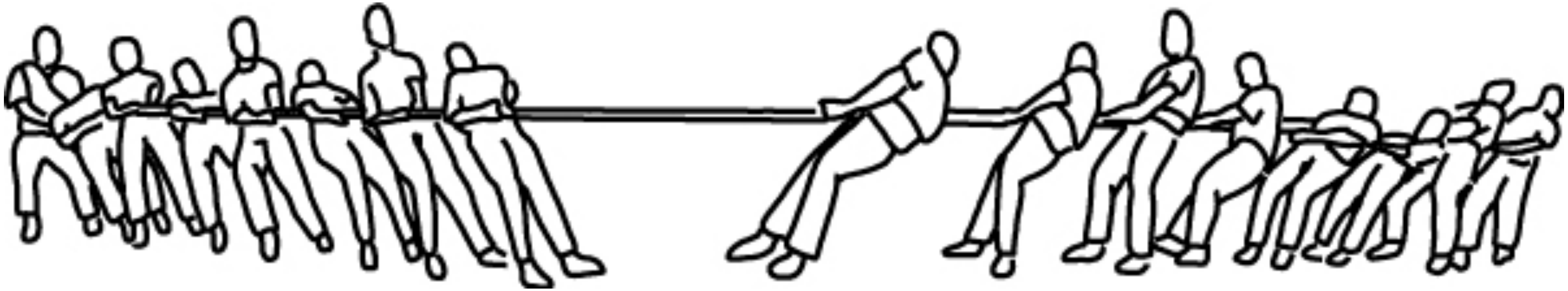


Énoncé



La réponse du système à une somme d’excitations
est égale à
la somme des réponses dues à chaque excitation prise séparément.

Énoncé



La réponse du système à une somme d'excitations
est égale à
la somme des réponses dues à chaque excitation prise séparément.

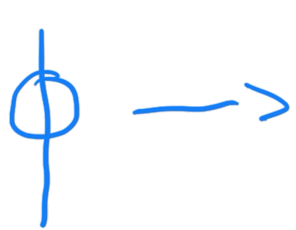
Le système doit être linéaire !!

Méthodologie

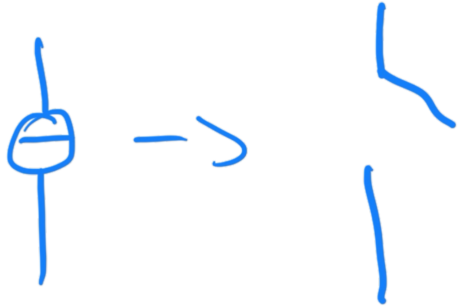
- Eviter une méthode d'analyse globale souvent lourde
- → Succession de calculs partiels
- A chaque étape, une seule source est prise en compte
- Les autres sont annulées
- Le résultat total est la somme algébrique des résultats partiels

Que signifie « annuler une source » ?

* Source de tension



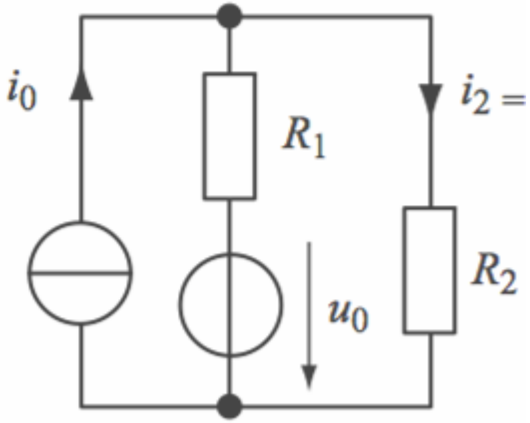
$U=0 \iff$ fil électrique



$I=0 \iff$ circuit ouvert.

* Source de courant.

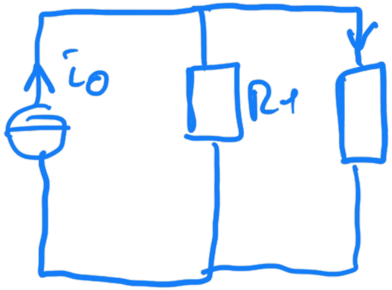
Exemple



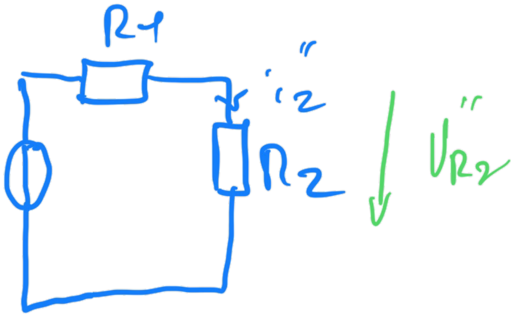
$i_2 = i_2' + i_2''$

U_{R_2}

$\equiv$



$(+)$



$$i_2' = i_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_2'' = \frac{u_0}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow \underline{i_2 = i_2' + i_2''} \qquad \underline{U_{R_2} = U_{R_2}' + U_{R_2}''}$$

CONCLUSIONS

- Circuit complexe
- → somme de circuits plus simples
- Les éléments doivent être linéaires
- Prêter attention aux signes

5.9 TRANSFORMATION Π-T

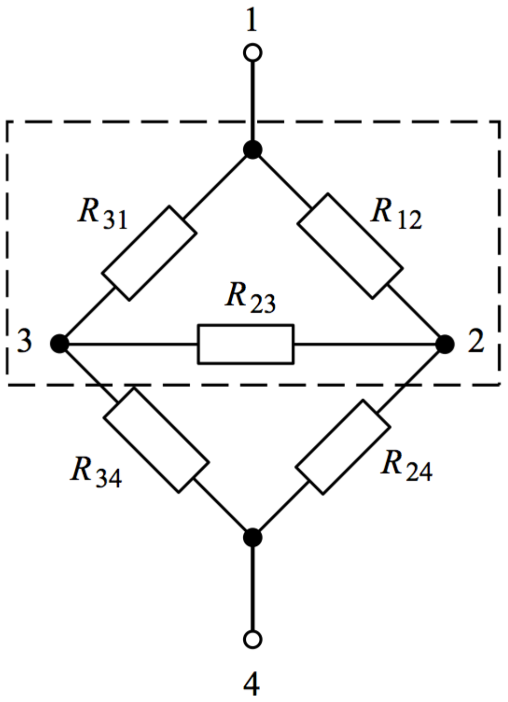
Électrotechnique I

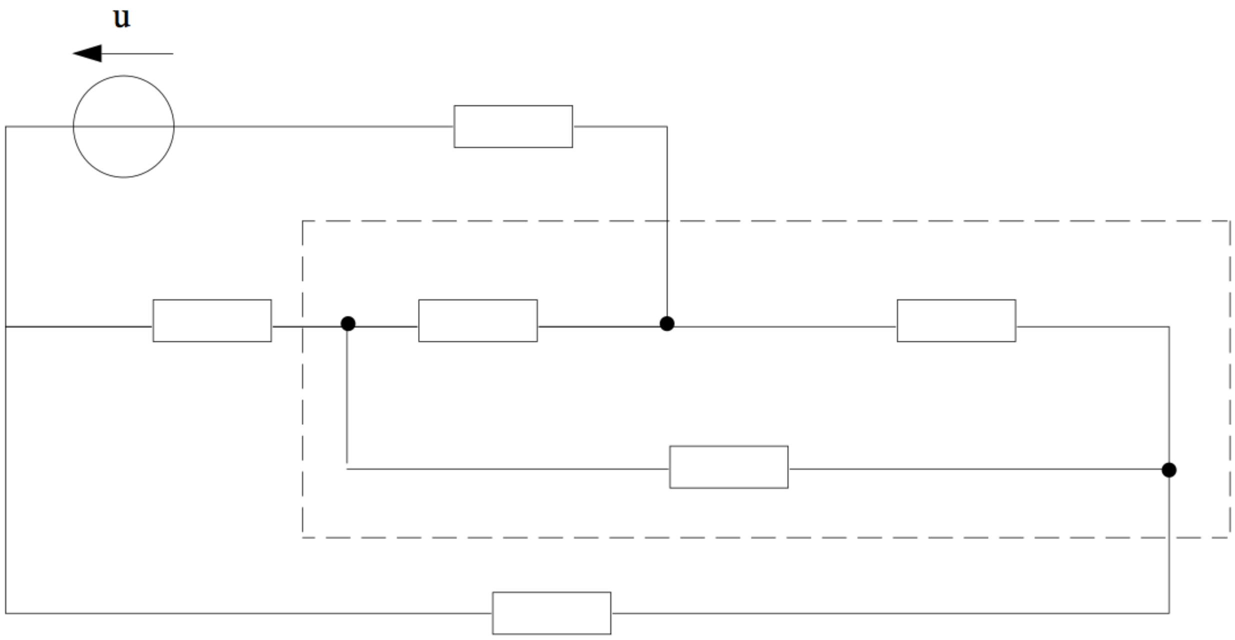
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d’Actionneurs Intégrés

Introduction

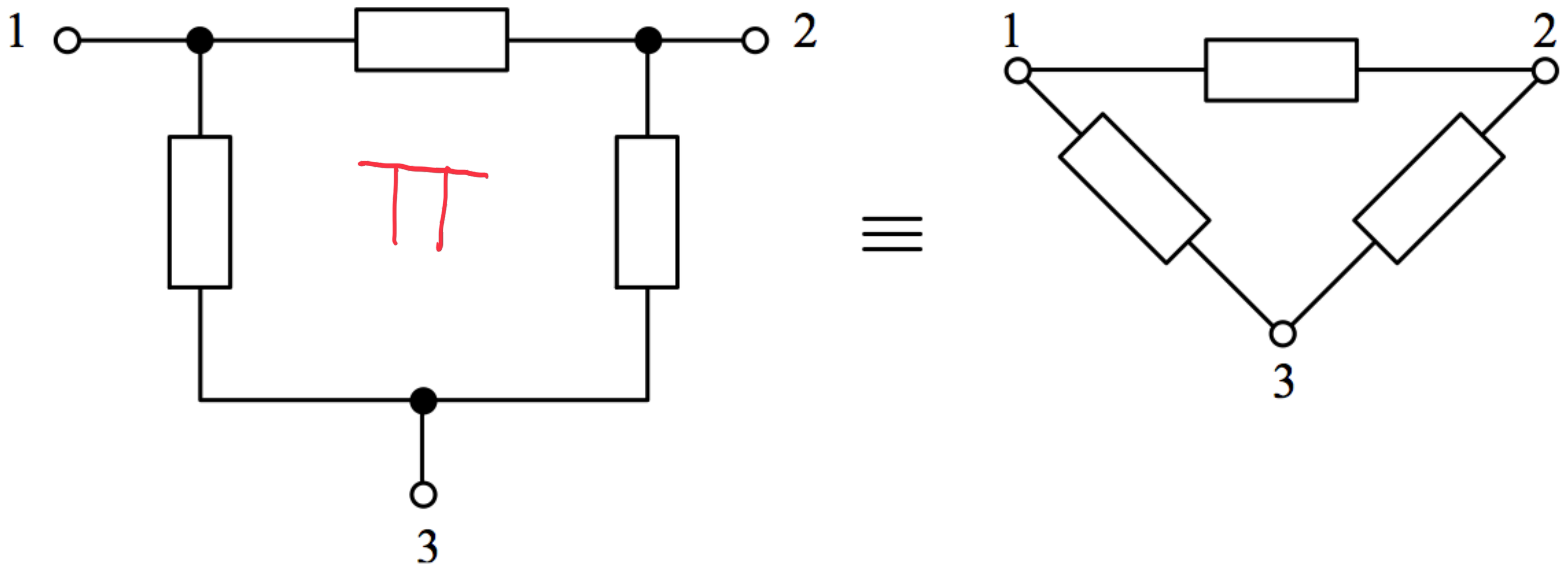
- Circuits particuliers
- Trois éléments (tripôle) connectés
  - « en π » , « en triangle » ou « en Δ »
  - « en T » , « en étoile » ou « en Y »
- Equivalence

Exemples de circuits difficiles à simplifier



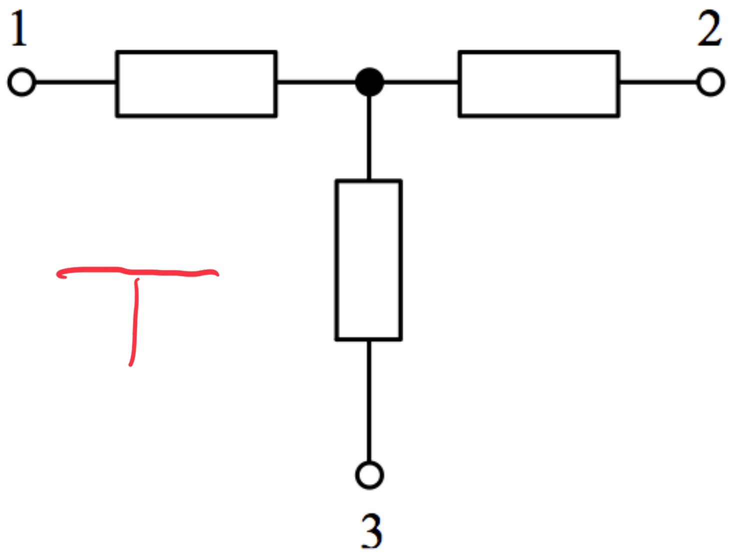


Tripôles « en π » (ou « en triangle » , « en Δ » ou « *Delta connection* »)

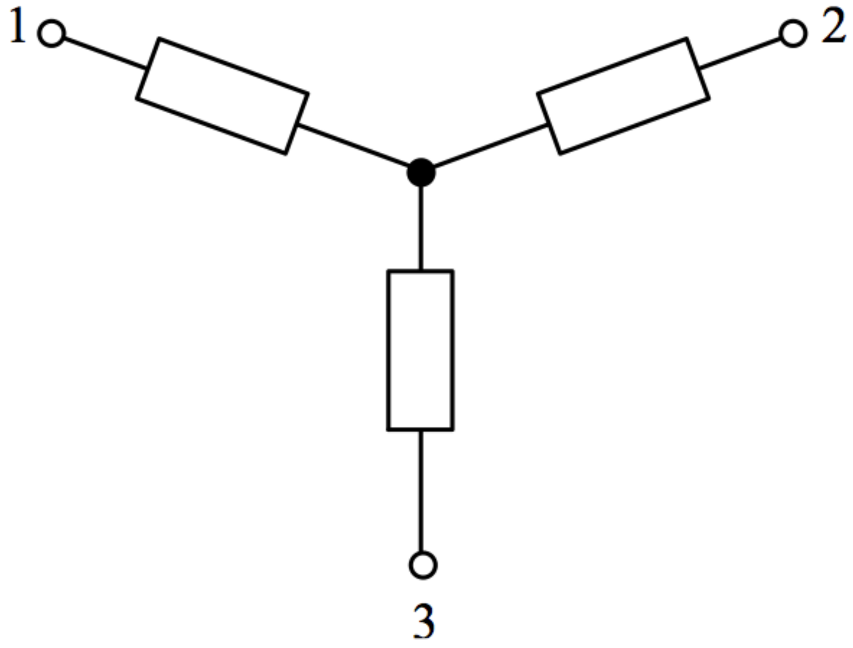


EPFL

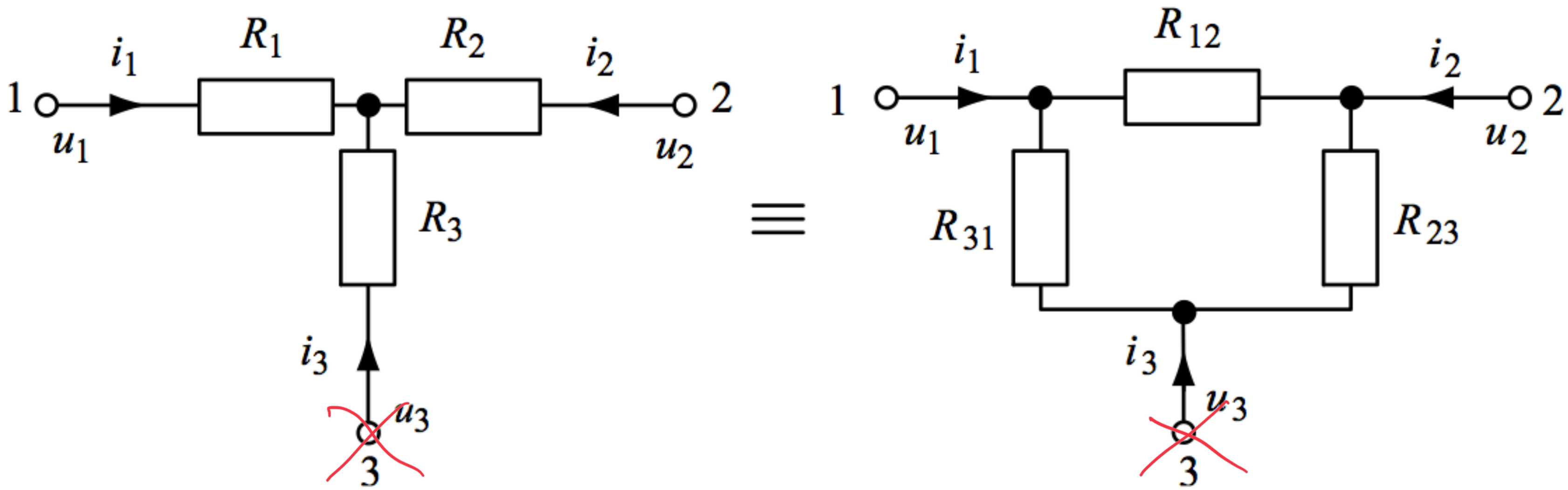
Tripôles « en T » (ou « en étoile », « en Y » ou « *Star connection* »)



$\equiv$



Équivalence de tripôles « en T » et « en π »

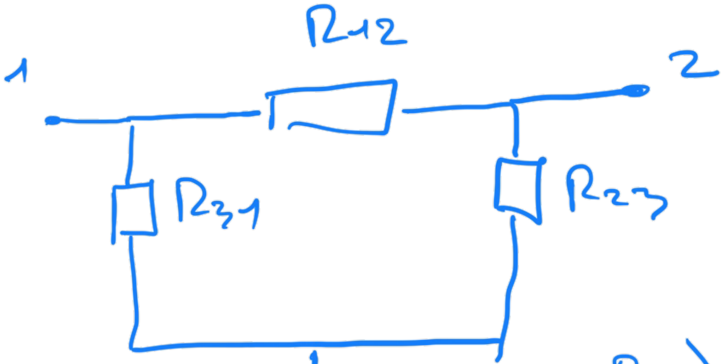


EPFL

Équivalence de tripôles « en T » et « en π »

Si on annule la borne 3

$=$

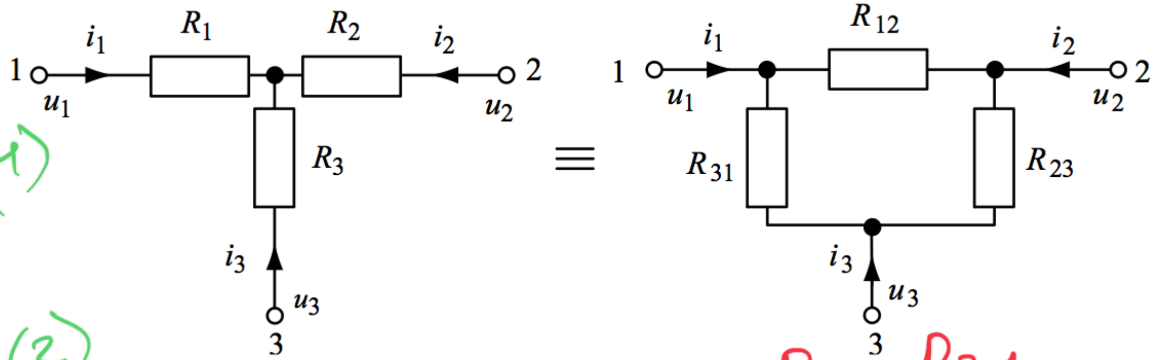


$$R_{eq_1} = R_1 + R_2$$

$$R_{eq_2} = \frac{R_{12}(R_{31} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$\Rightarrow R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{31} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

TRANSFORMATION Π-T



$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1)$$

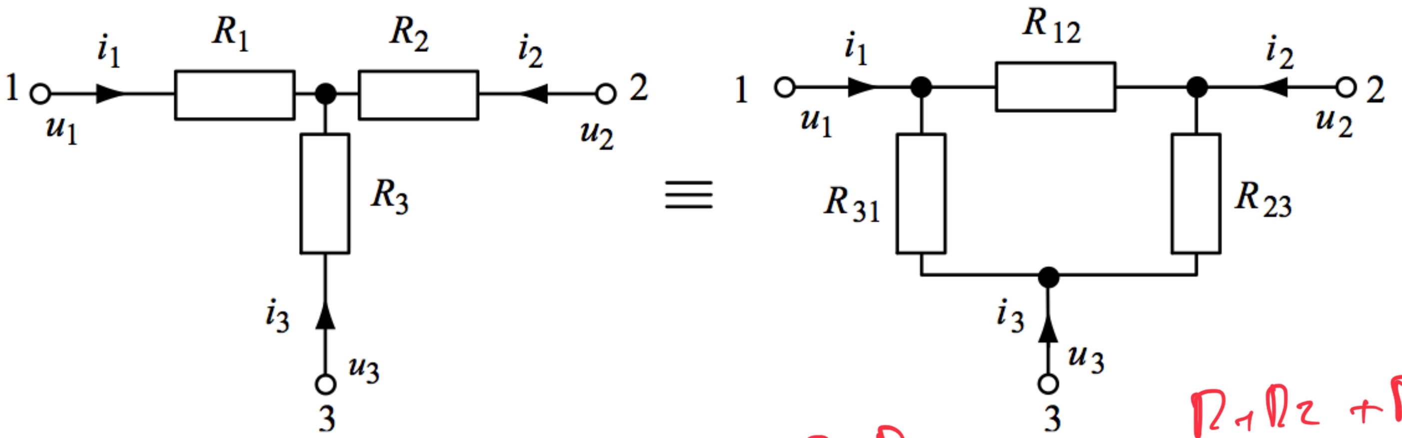
$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (2)$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\left[(1) - (2) + (3)\right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \dfrac{R_{12}\,R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \dfrac{R_{12}\,R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \dfrac{R_{23}\,R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{array} \right.$$

EPFL

Équivalence de tripôles « en T » et « en π » - Opération inverse

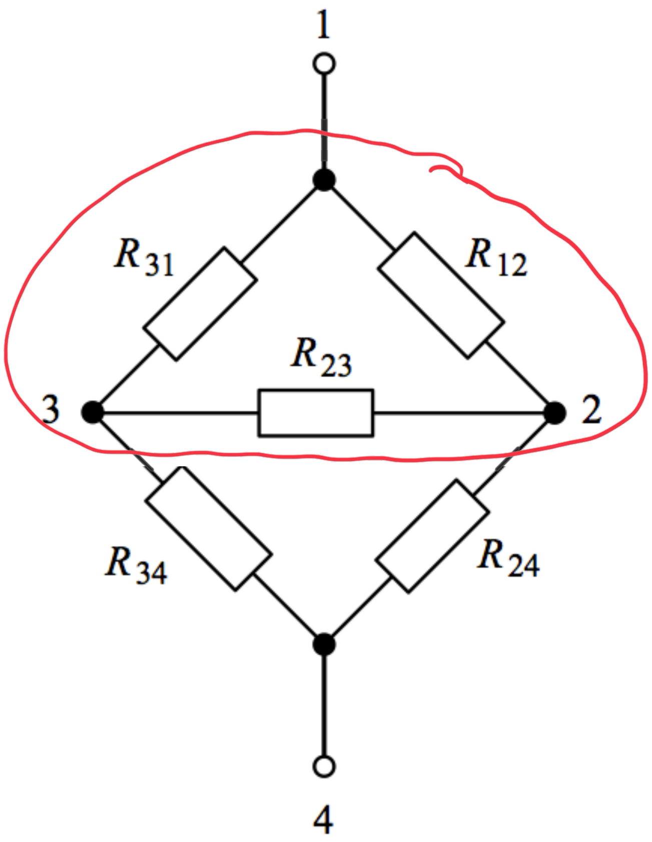


$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

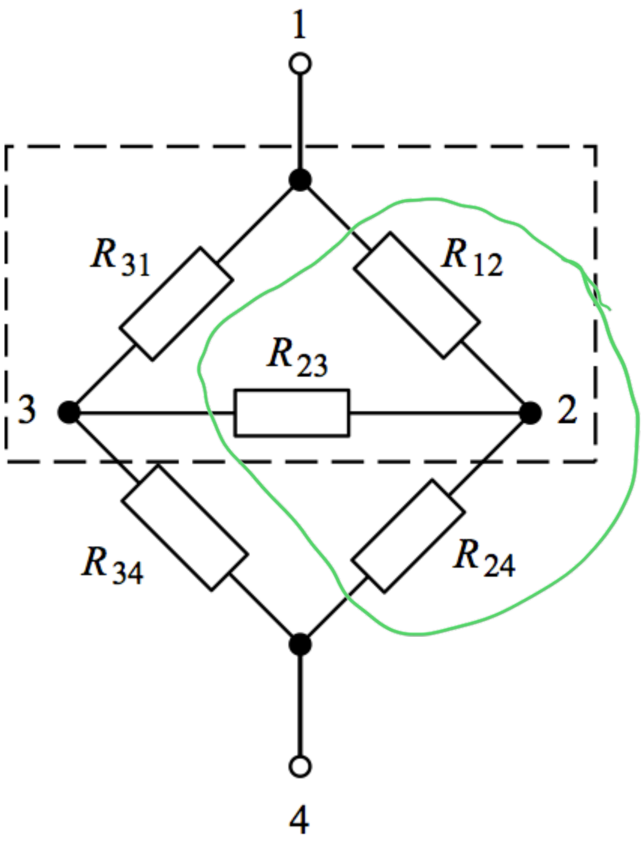
Exemple



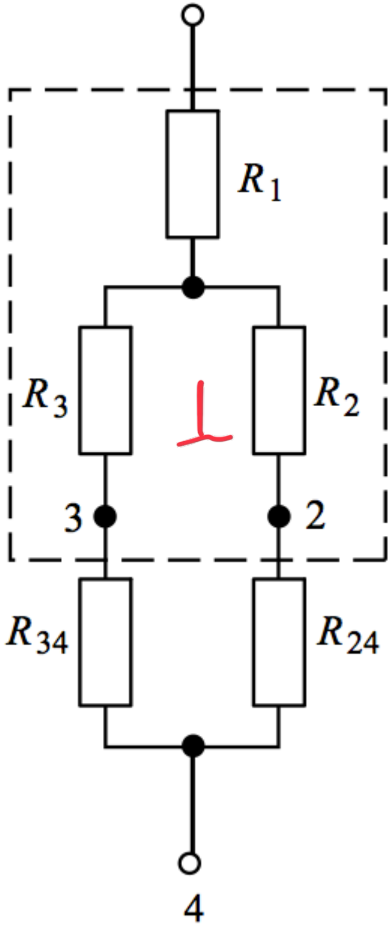
EPFL

Exemple

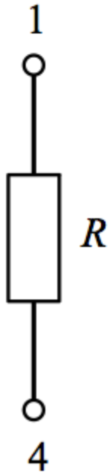
$$R = R_1 + \frac{(R_2+R_{24})(R_3+R_{34})}{R_2+R_{24}+R_3+R_{34}}$$



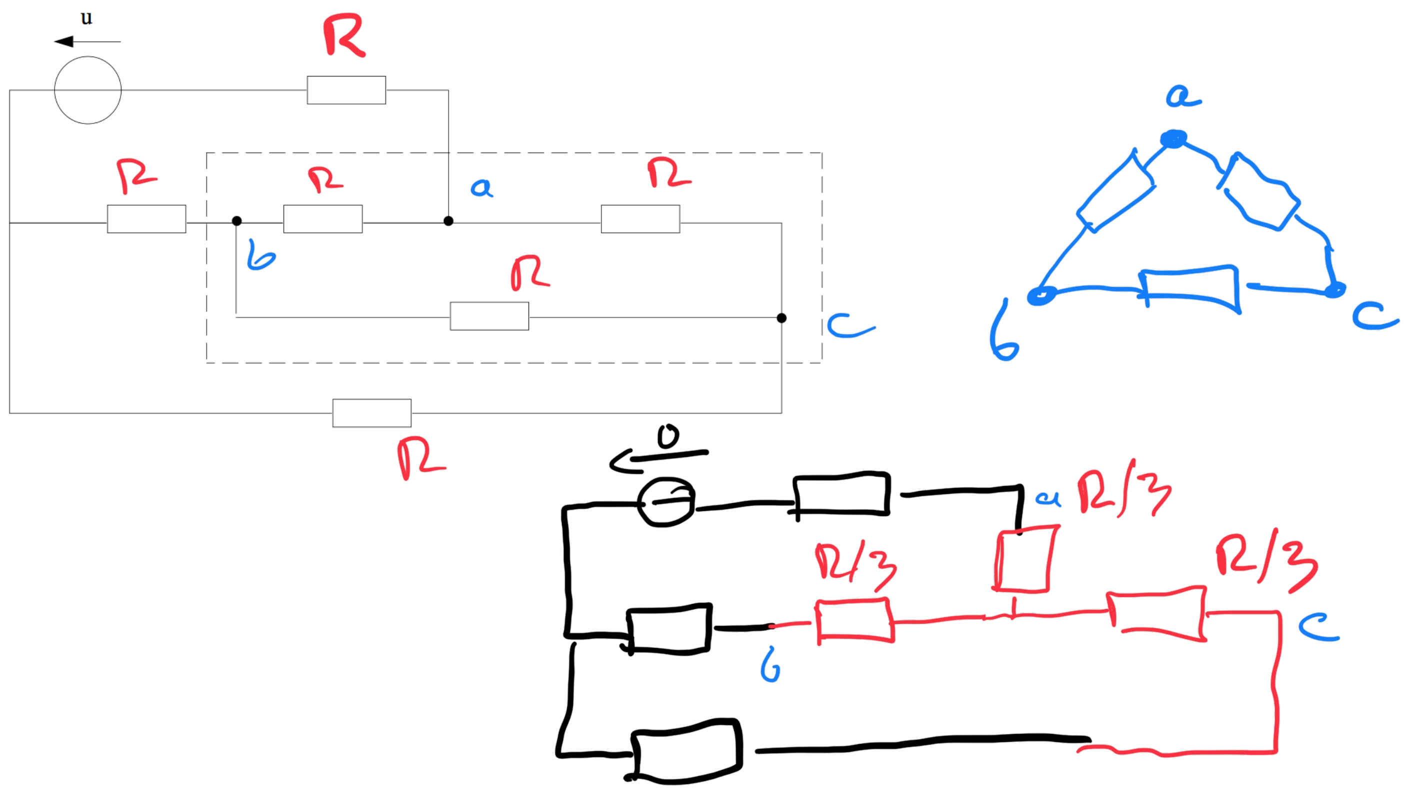
≡



≡



Exemple

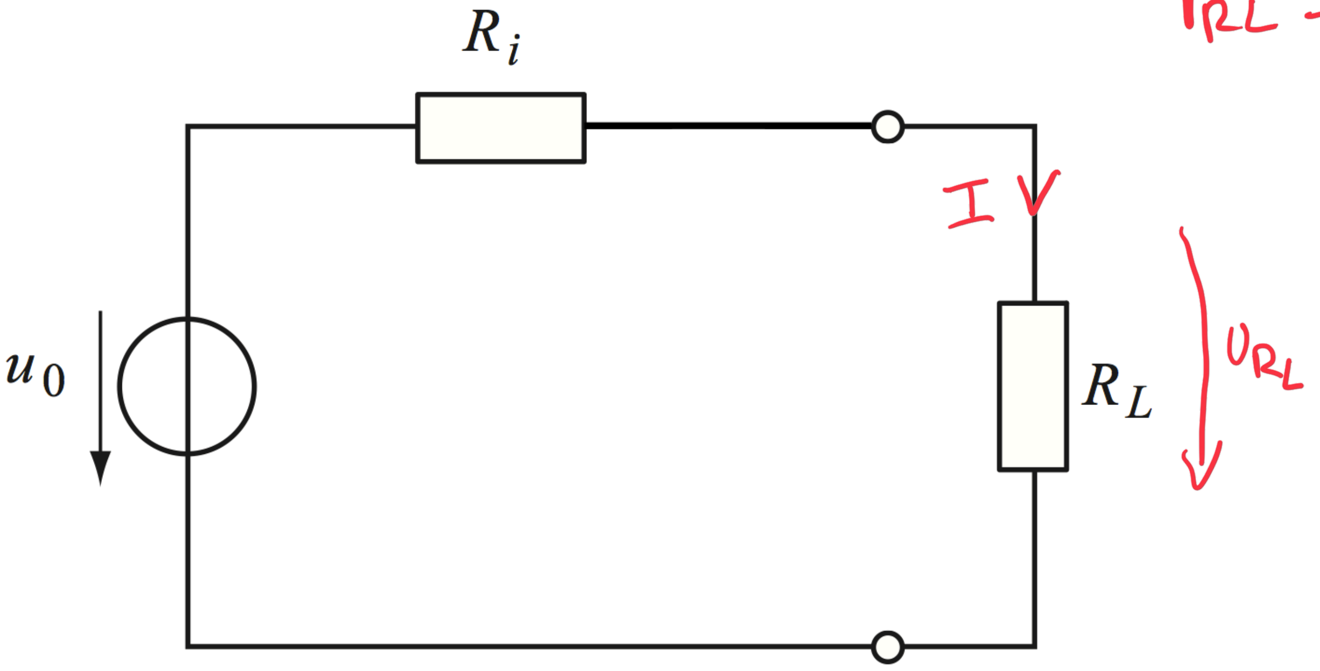


5.11 PUISSANCE MAXIMALE ET ADAPTATION

Électrotechnique I

Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

Source de tension réelle – Charge – Puissance



$$P_{RL} = U_{RL} I = R_L I^2$$

où $I = \dfrac{U_0}{R_L + R_i}$

$$\Rightarrow P_{RL} = \frac{R_L U_0^2}{(R_i + R_L)^2}$$

R_L ?

pour que P_{RL} soit max.

PUISSANCE MAXIMALE FOURNIE PAR UNE SOURCE RÉELLE

Puissance maximale

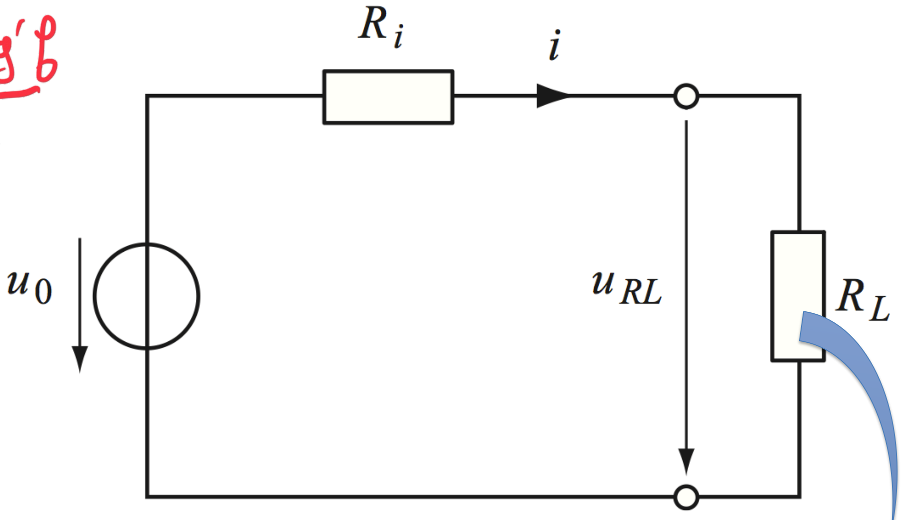
$$\frac{dP_{RL}}{dR_L}$$

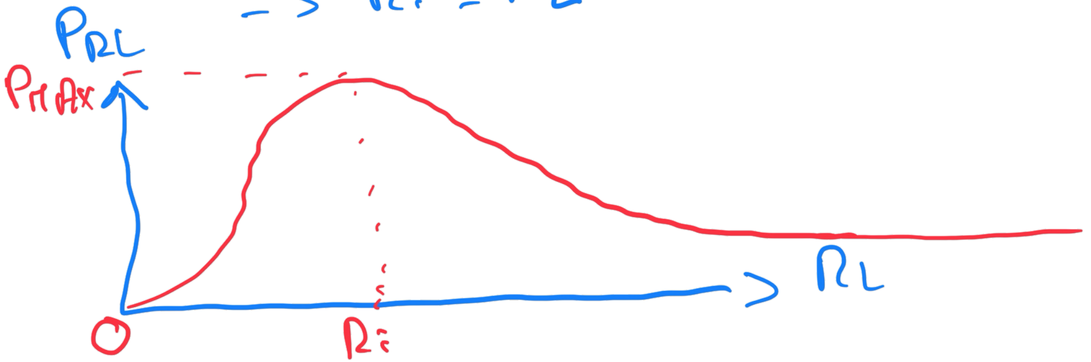
$$P_{RL} = \frac{f}{g} \qquad \frac{dP_{RL}}{dR_L} = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\frac{dP_{RL}}{dR_L} = \frac{U_0^2 (R_L + R_i)^2 - 2U_0^2 R_L (R_L + R_i)}{(R_L + R_i)^4} = 0$$

$$\Rightarrow R_i^2 = R_L^2$$

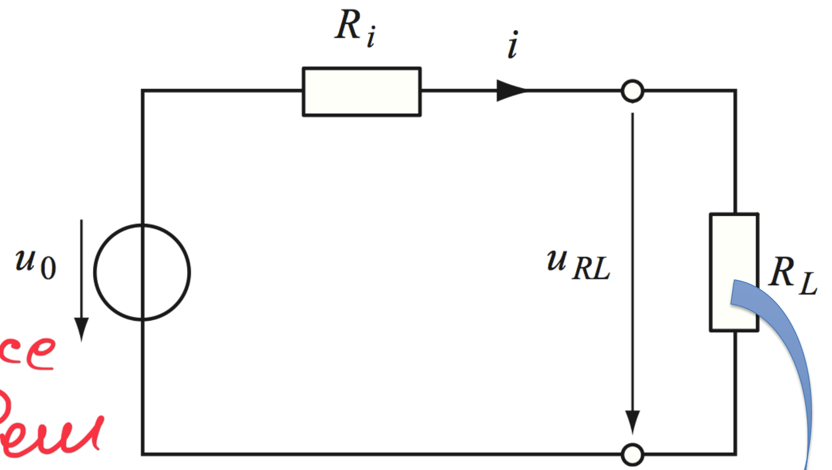
$$\Rightarrow R_i = R_L$$





$$P_{RL} = \frac{{u_0}^2 R_L}{(R_L + R_i)^2}$$

Puissance maximale



Condition : $R_L = R_i$

$$P_{RL} = \frac{{u_0}^2 R_L}{(R_L + R_i)^2}$$

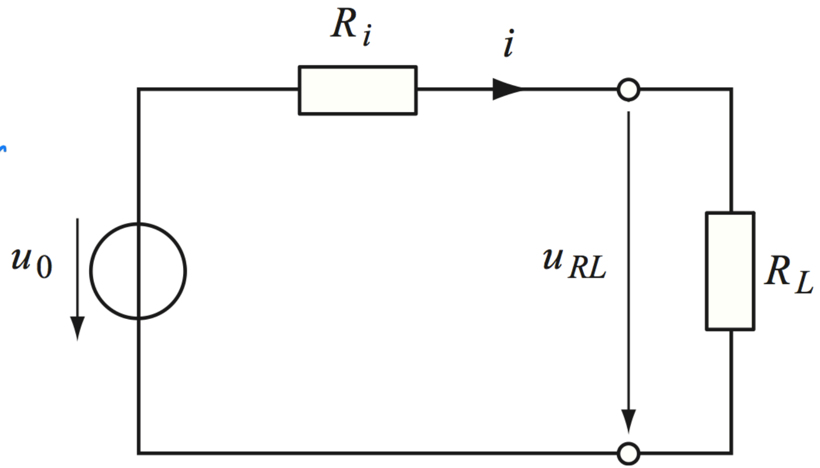
La condition d'adaptation de puissance est donc réalisée lorsque la valeur de la résistance de charge et celle de la résistance interne de la source sont égales.

Rendement

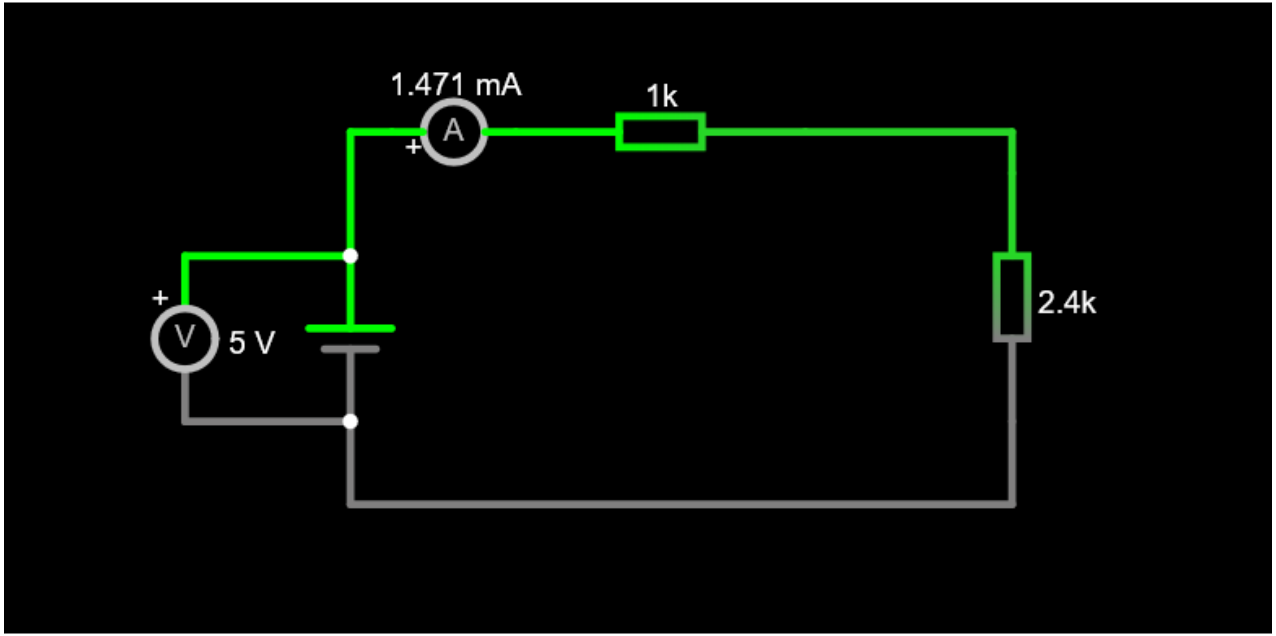
$$\eta = \frac{P_{utile}}{P_{consommée}} = \frac{R_L \cancel{I^2}}{(R_L + R_i)\cancel{I^2}}$$

si $R_L = R_i$

$$\eta = 0{,}5$$



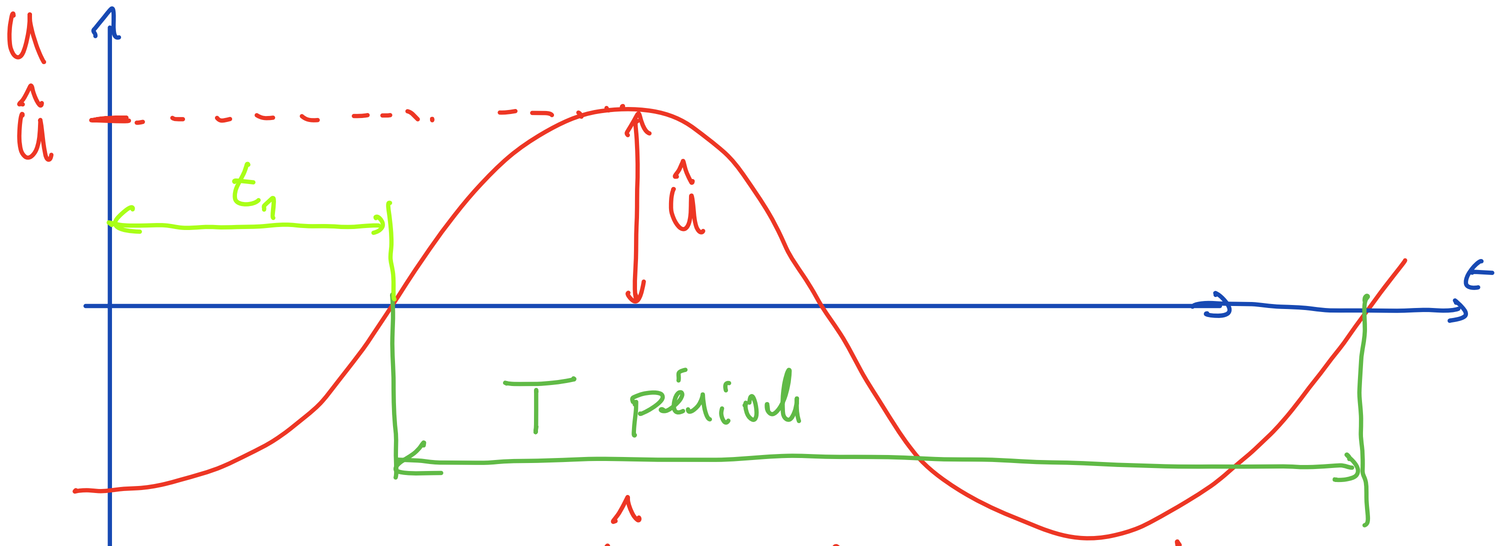
Simulation sous Falstad



https://www.falstad.com/circuit/

6. Régime Sinusoïdal Monophasé

6.2 Grandeurs Sinusoïdales :



$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

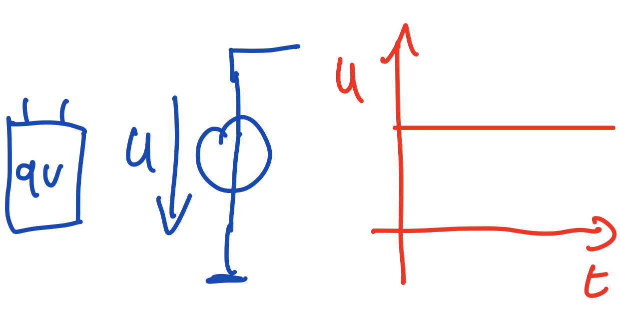
T = période du signal (s)

f = fréquence = $\frac{1}{T}$

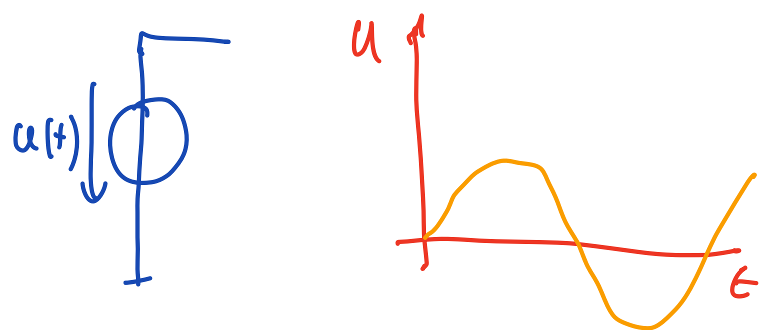
ω = pulsation = $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

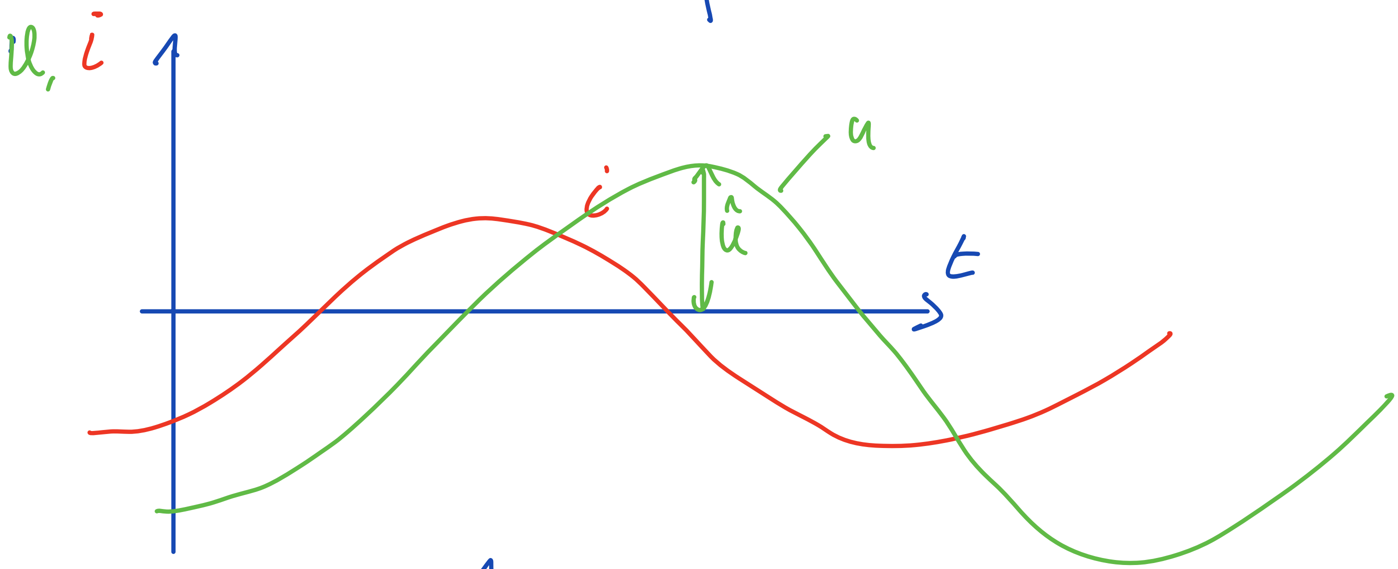
$$\alpha = \frac{t_1 \cdot 2\pi}{T}$$

Continu



Sinus





$$u(t) = \hat{U}\sin(\omega t + \alpha) = u$$

$$i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \beta) = i$$

Définition : $\varphi = \alpha - \beta$ (Déphasage entre u et i

Définition de la valeur moyenne :

$$\bar{X} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

↑
moyenne

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{U}\sin(\omega t + \alpha)\,dt = 0$$

Moyenne de $u(t)$, sur $T/2$:

$$\bar{u}\Big|_{T/2} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} \hat{u}\sin(\omega t)\,dt$$

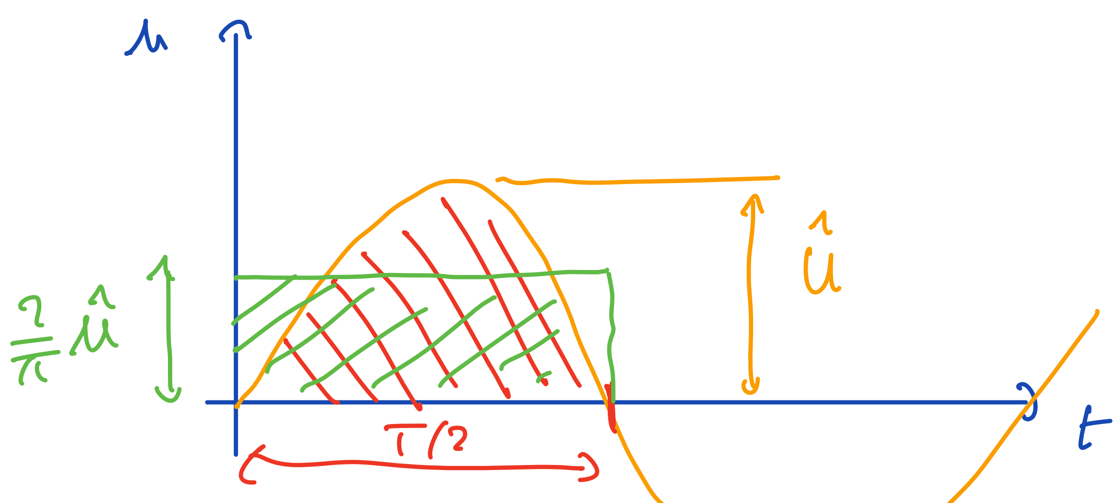
On pose $\alpha = 0$

$$= \frac{2\hat{u}}{T}\,\frac{1}{\omega}\left[-\cos\left(\frac{T}{2}\cdot\omega\right) + \cos(0)\right]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{\cancel{2}\hat{u}\cancel{T}}{\cancel{T}\cdot\cancel{2}\pi}\left[-\cos\left(\frac{\cancel{T}}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{T}}\right) + \cos(0)\right]$$

$$= \frac{\hat{u}}{\pi}\left[1 + 1\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\hat{u}$$



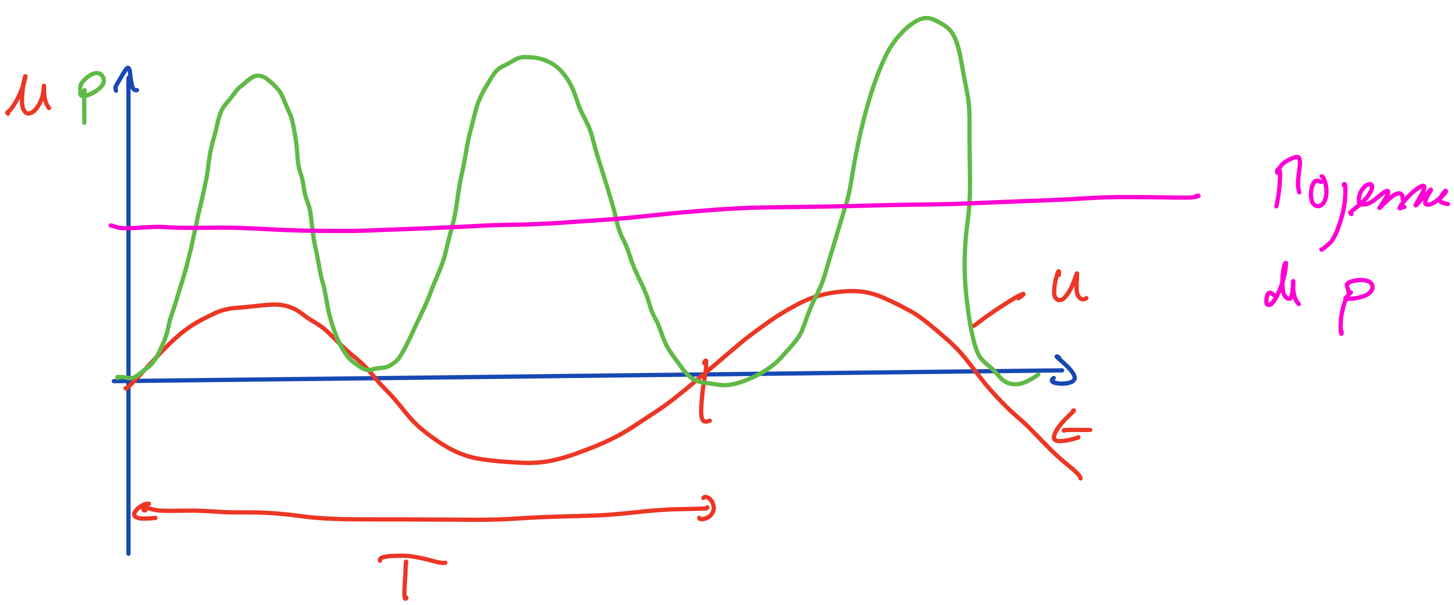
6.2.13 Puissance instantanée

$$p = u \cdot i$$ (en fonction du temps)

Calcul de la puissance dissipée dans une Résistance :

$$p = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R}$$

$$p = \frac{u^2}{R} = \frac{\hat{u}^2 \sin^2(\omega t + \alpha)}{R}$$



T

$$\overline{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{u}^2}{R}\sin^2(\omega t+\alpha)\,dt$$

$$\overline{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{u}^2}{R}\cos^2(\omega t+\alpha)\,dt$$

$+$

$$2\,\overline{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\hat{u}^2}{R}\cdot 1\,dt$$

$$2\,\overline{P}_R = \frac{\hat{u}^2}{R}$$

$$\underline{\underline{\overline{P}_R = \frac{\hat{u}^2}{2R}}}$$

En continu : $P_R = \overline{P}_R = \dfrac{U^2}{R}$

6.2.12 Définition de la valeur efficace (RMS Root Mean Square)

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{u}^2\sin^2(\omega t+\alpha)\,dt}$$

$\uparrow$

moyenne

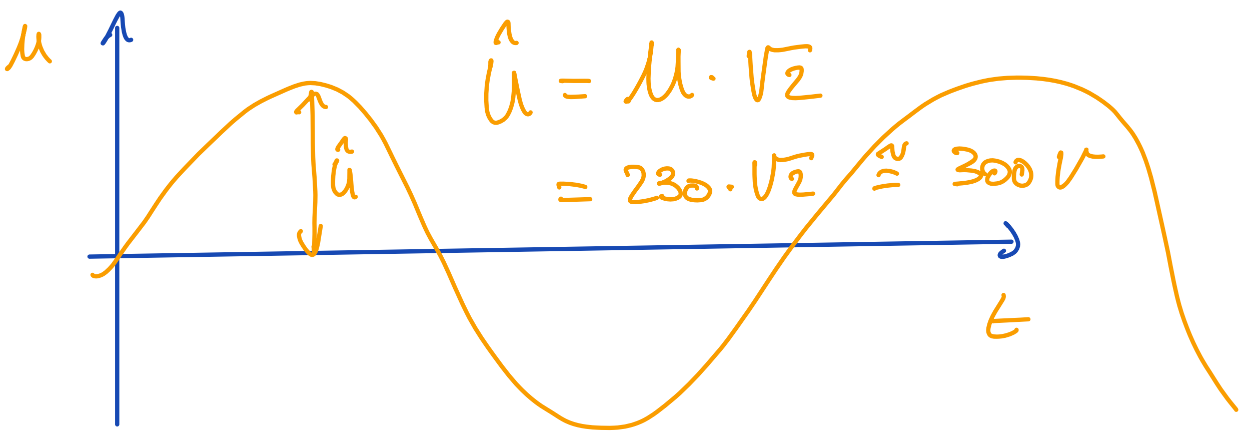
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad (\text{efficace})$$

$$\hat{U} = U \cdot \sqrt{2}$$

crête — efficace

$$\bar{P}_R = \frac{\hat{U}^2}{2R} = \frac{U^2}{R} = P_R \text{ en DC}$$



u, i : valeurs instantanées

U, I : " efficaces

$\hat{U}, \hat{I}$: " crêtes

$\bar{u}, \bar{i}$: " moyennes

6.2.14 cas de R :

$$u = R \cdot i$$

$$\hat{U} \cos(\omega t + \alpha) = R \cdot \hat{I} \cos(\omega t + \beta)$$

Donc $\hat{U} = R \cdot \hat{I}$

$\alpha = \beta$ $\qquad$ u est en phase avec i

6.2.15 cas de L

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$$\hat{U} \cos(\omega t + \alpha) = -\omega L \hat{I} \sin(\omega t + \beta)$$

$$= +\omega L \hat{I} \cos\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{U} = \omega L \hat{I}$$

$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ Tension et le courant sont en quadrature : retard du courant de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension

6.2.16 Cas de C

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$\hat{I} \cos(\omega t + \beta) = -\omega C \hat{U} \sin(\omega t + \alpha)$$

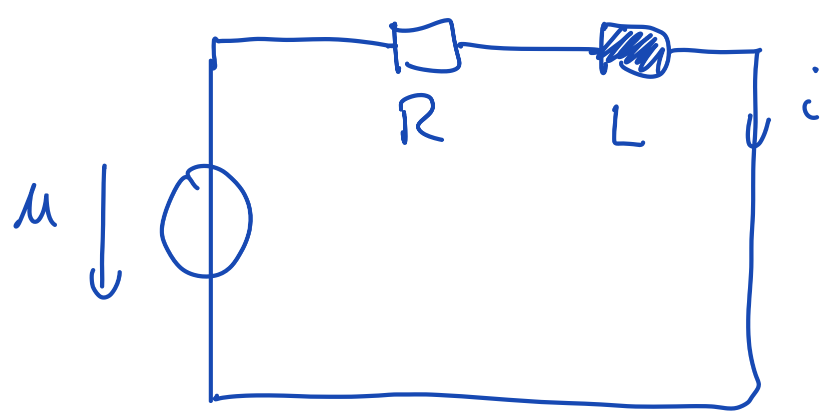
$$= \omega C \hat{U} \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{U} = \frac{\hat{I}}{\omega C}$$

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$$

Tension et courant sont en quadrature : avance du courant de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension

6.3 Calcul complexe associé :



$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha) \quad \text{connu}$$

$i = \hat{I}\sin(\omega t + \beta)$ inconnu ?

comme l'origine du temps est arbitraire :

on pose $\alpha = 0$

$$u = R \cdot i + L\frac{di}{dt}$$

$$\hat{U}\sin(\omega t) = R\hat{I}\sin(\omega t + \beta) + L\omega\hat{I}\cos(\omega t + \beta)$$

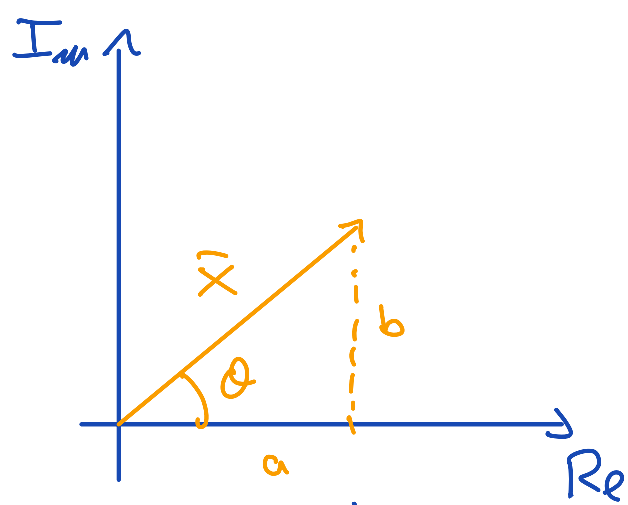
Autre méthode :

nb complexe : $j = \sqrt{-1}$

Rappel :

$$\underline{X} = a + bj$$

↑
vecteur



$$\underline{X} = \hat{X}\left(\cos(\theta) + j\sin(\theta)\right)$$

$$\underline{X} = \hat{X}e^{j\theta}$$

Formule d'Euler

Concept :

$$u = \hat{U} \sin(\omega t) \xrightarrow{\text{trans. complex}} \underline{u} = \hat{U} e^{j(\omega t)}$$

calcul

$$\xleftarrow{u = \mathrm{Im}\{\underline{u}\}}$$

$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{i} = \hat{I} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\xleftarrow{i = \mathrm{Im}\{\underline{i}\}}$$

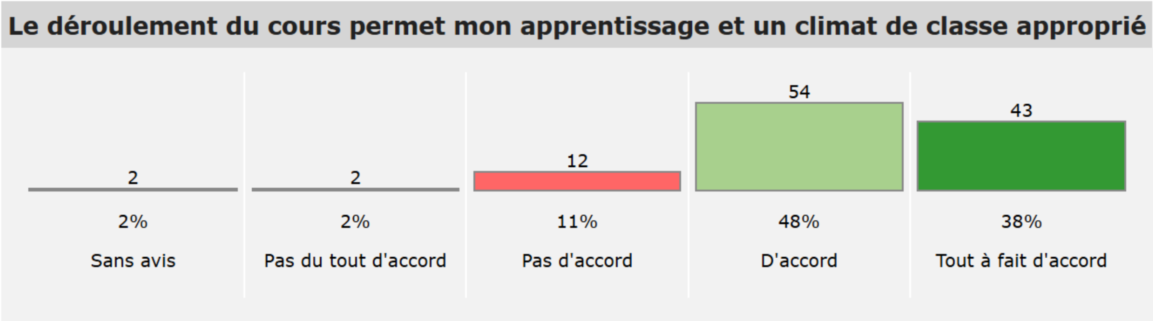
FEEDBACK
5.7 THÉORÈMES DE THÉVENIN ET DE NORTON
QUIZ
6. RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL

Rappel sur les complexes
Calcul complexe associé: circuit RL et circuit RC
Définitions : Impédance…
Exemple d'un circuit RLC avec les impédances

Électrotechnique I
Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

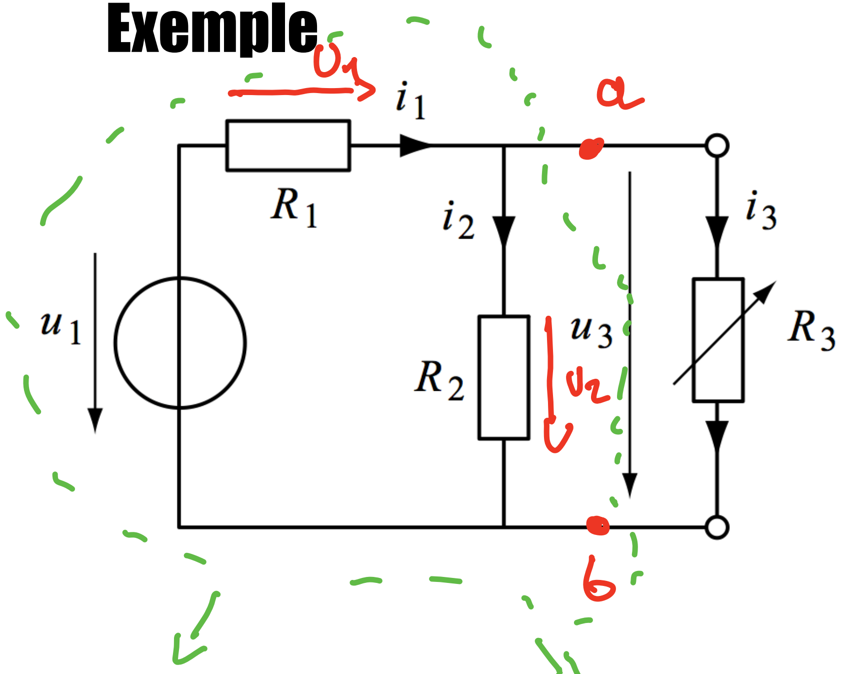
FEEDBACK ETUDIANTS

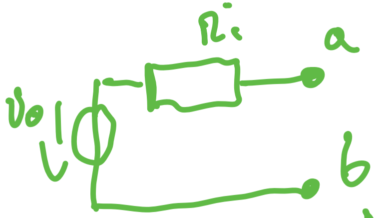
- 266 étudiants
- 113 Réponses

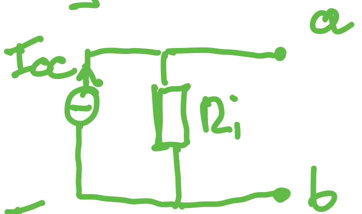


- Mais…

Exemple

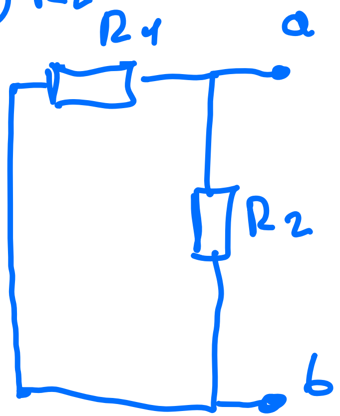






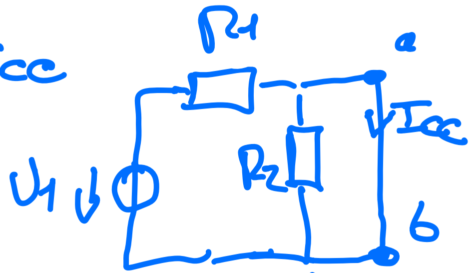
$U_0 = R_i I_{cc}$

① R_i



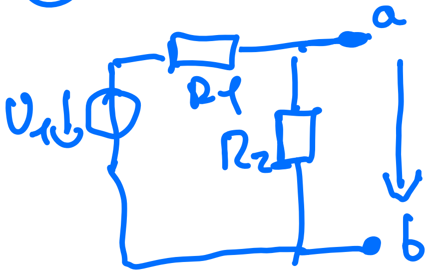
$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

② I_{cc}



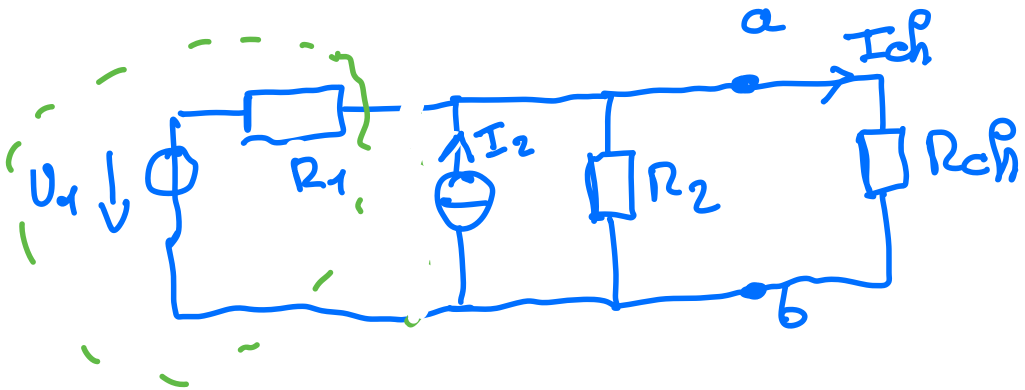
$$I_{cc} = \frac{U_1}{R_1}$$

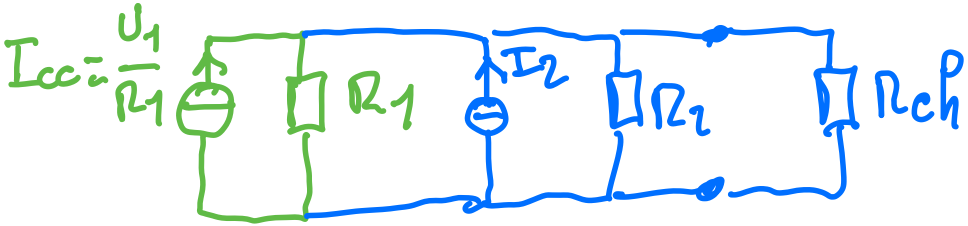
③ Tension à vide



$$U_{ab} = U_0 = U_{R_2} \quad U_1 \times \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

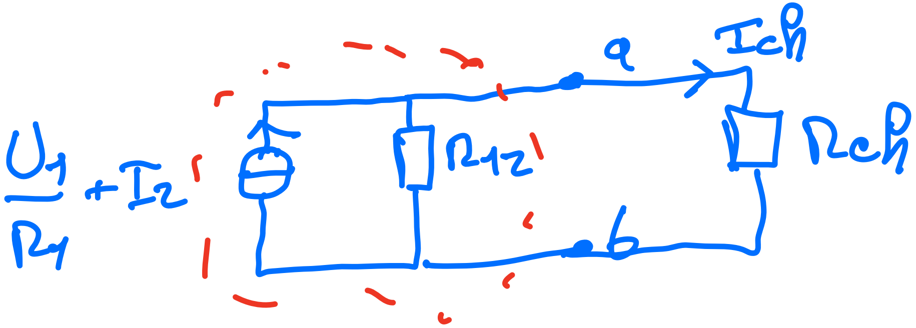
Autre exemple



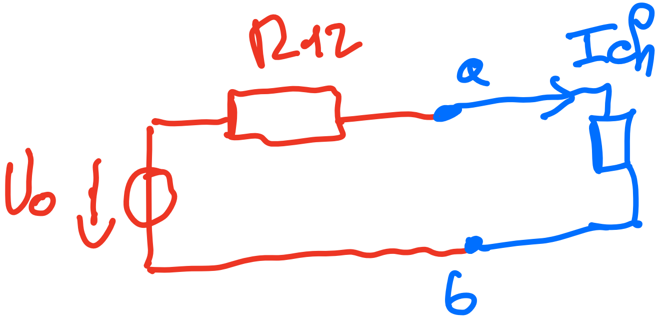


EPFL

Autre exemple



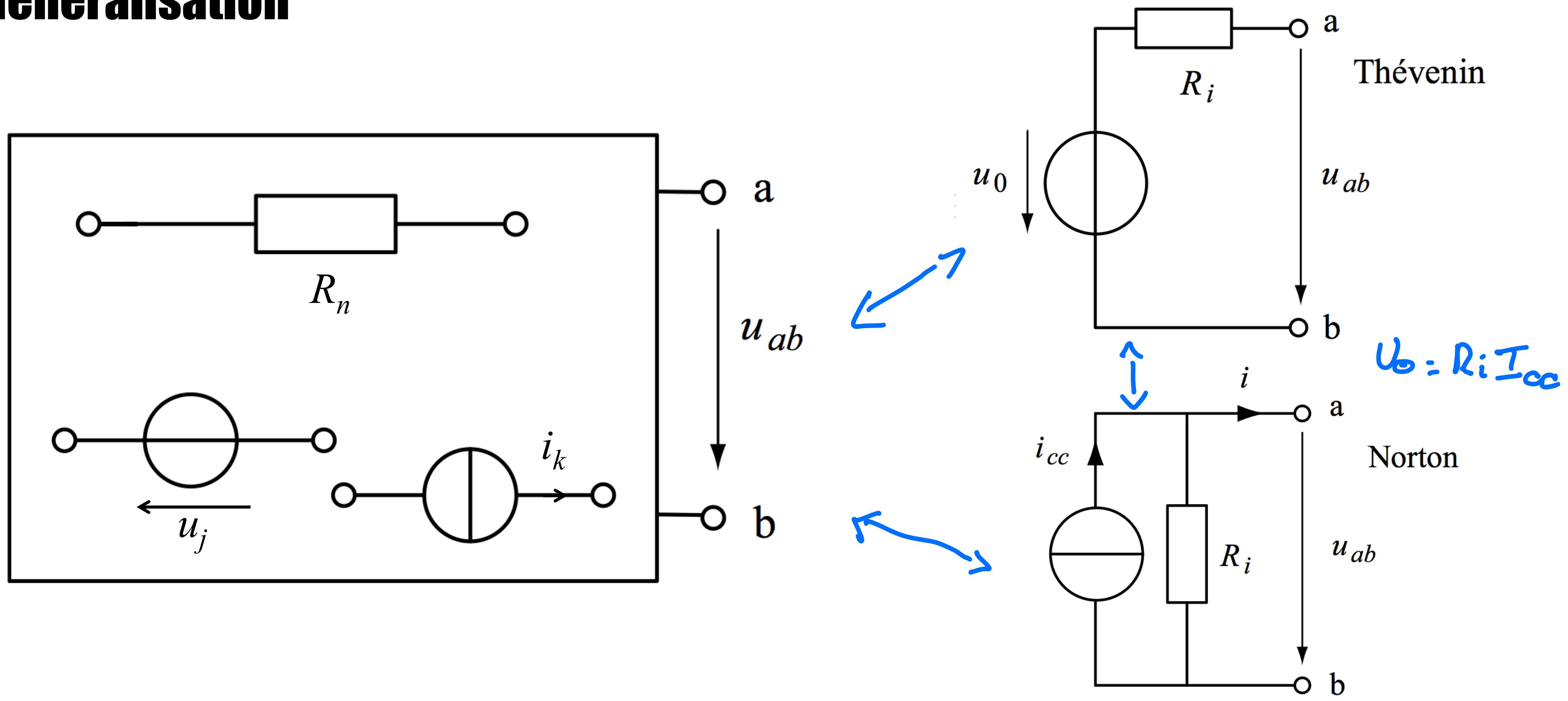
$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



$$U_0 = \left(\frac{U_1}{R_1} + I_2\right) R_{12}$$

EPFL

Généralisation



6. RÉGIME PERMANENT SINUSOÏDAL

RAPPEL SUR LES COMPLEXES

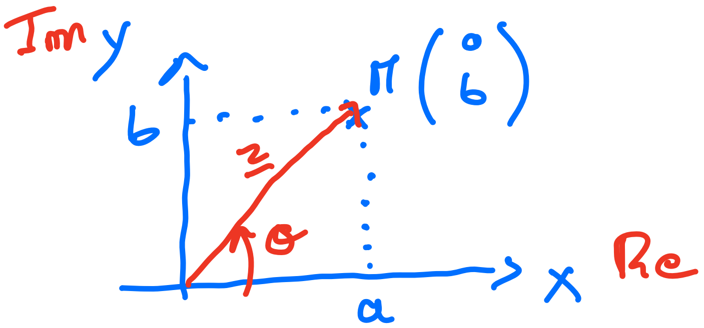
CALCUL COMPLEXE ASSOCIÉ: CIRCUIT RL ET CIRCUIT RC
DÉFINITIONS : IMPEDANCE…
EXEMPLE D'UN CIRCUIT RLC AVEC LES IMPÉDANCES

Électrotechnique I

Yves PERRIARD & Yoan CIVET
Laboratoire d'Actionneurs Intégrés

RAPPEL NOMBRES COMPLEXES

EPFL



$\underline{z} = a + ib$ avec $i^2 = -1$ $i \to j$ $j^2 = -1$

$= a + jb$

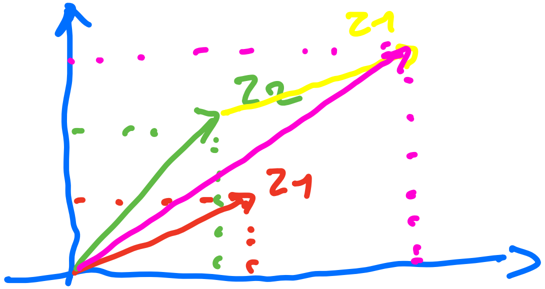
$\underline{z} = |\underline{z}| \cos\theta + j\,|\underline{z}| \sin\theta$ $|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\underline{z} = |\underline{z}|\, e^{j\theta}$

$\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$

$\underline{z}_2 = a_2 + jb_2$

$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = \underline{z}_3$



$\frac{d}{d\theta} \to \times j$

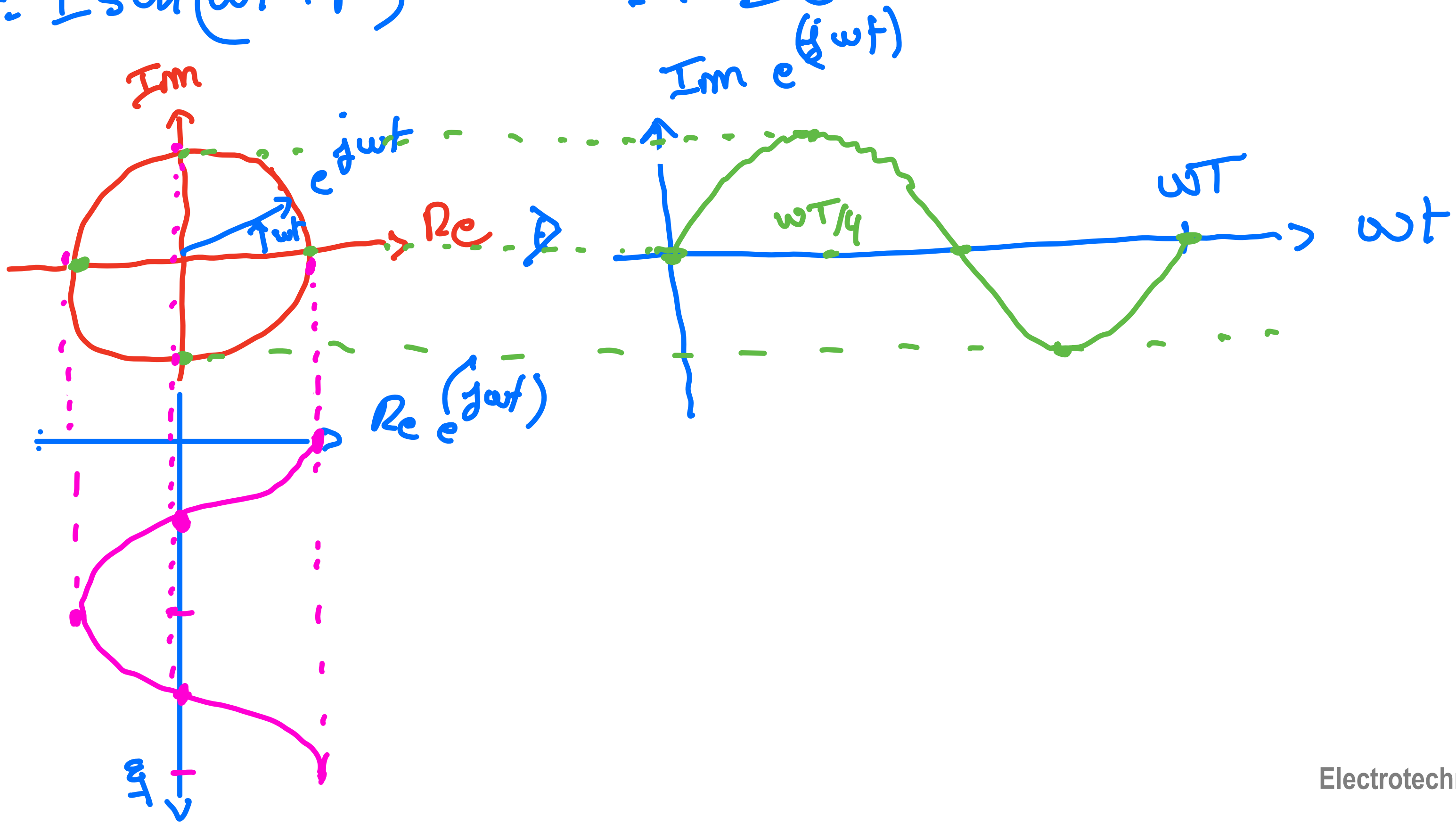
$\int d\theta \to \frac{1}{j}$

DU COSINUS (OU SINUS) VERS L'EXPONENTIELLE ET INVERSEMENT

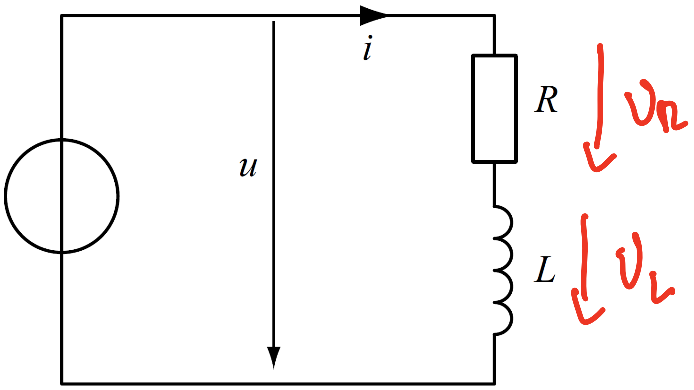
$$v(t) = \hat{V} \sin(\omega t + \alpha) \quad \overset{\mathbb{C}}{\Longrightarrow} \quad \underline{v} = \hat{V} e^{j(\omega t + \alpha)}$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \beta) \qquad\qquad \underline{i} = \hat{I} e^{j(\omega t + \beta)}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



Cas d'une résistance et d'une inductance en série



1. Refaire le schéma
2. Sens tensions et courants
3. Kirchoff
4. On passe en complexe
5. Dériver-intégrer
6. Résoudre en identifiant
7. Solution complexe
8. Retour au réel

$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha)$, $R, L, \omega, \alpha, \hat{U}$ } connus

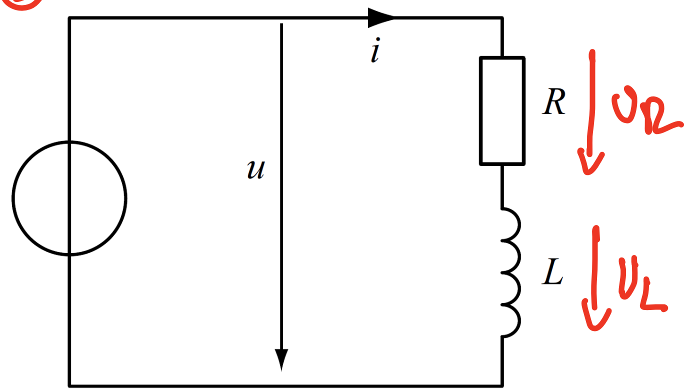
$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \beta)$, $\hat{I}, \beta$ } ce que l'on cherche.

EPFL

Cas d'une résistance et d'une inductance en série

1. Refaire le schéma
2. Sens tensions et courants
3. Kirchoff
4. On passe en complexe
5. Dériver-intégrer
6. Résoudre en identifiant
7. Solution complexe
8. Retour au réel

1 2



3 $u = Ri + L\frac{di}{dt}$ (0)

4 $u \to \underline{u} = \hat{U}e^{j(\omega t+\alpha)}$

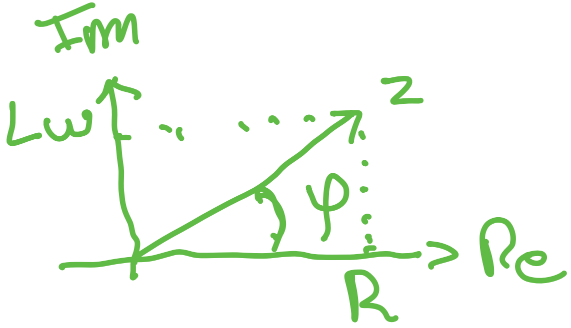
$i \to \underline{i} = \hat{I}e^{j(\omega t+\beta)}$

(0) $\Rightarrow$ $\underline{u} = R\underline{i} + L\frac{d\underline{i}}{dt}$

5 $\underline{u} = R\underline{i} + Lj\omega\underline{i} = \underbrace{(R + j\omega L)}\underline{i} = \underline{Z}\,\underline{i}$

$\underline{Z} = R + j\omega L = |\underline{Z}|e^{j\varphi}$

Impédance



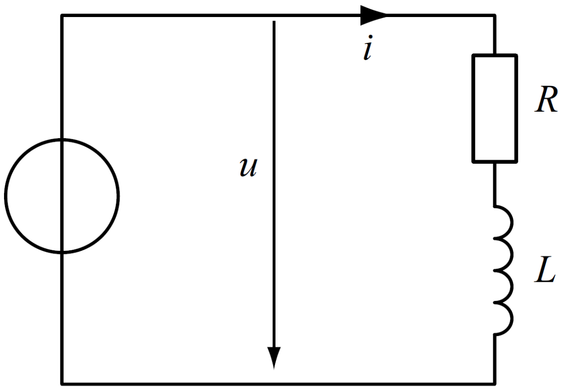
$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

$\underline{z}$ complexe ; $\left.\begin{matrix} z \\ |\underline{z}| \end{matrix}\right\}$ norme

Cas d'une résistance et d'une inductance en série

1. Refaire le schéma
2. Sens tensions et courants
3. Kirchoff
4. On passe en complexe
5. Dériver-intégrer
6. Résoudre en identifiant
7. Solution complexe
8. Retour au réel



(6) $\underline{u} = \underline{z}\,\underline{i}$

$$\underbrace{\hat{U}}e^{j(\omega t+\alpha)} = z e^{j\varphi} \cdot \hat{I} e^{j(\omega t+\beta)} = \underbrace{z\hat{I}} \cdot e^{j(\omega t+\beta+\varphi)}$$

$$\hat{U} = z\hat{I}$$

$$\cancel{\omega t} + \alpha = \cancel{\omega t} + \beta + \varphi \Rightarrow \alpha = \beta + \varphi$$

$$\varphi = \alpha - \beta$$

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

(7) $\underline{i} = \hat{I} e^{j(\omega t+\beta)}$

avec $\hat{I} = \frac{\hat{U}}{z}$ et $\beta = \alpha - \varphi$

(8) $i(t) = \mathrm{Im}\{\underline{i}\} = \hat{I}\sin(\omega t + \beta)$

Valeur instantanée complexe et phaseurs complexes

1. Valeur instantanée complexe: $\underline{u} = \hat{U} e^{j(\omega t + \alpha)}$ –> dépend du temps
2. Phaseur de crête: $\underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j\alpha}$ –> ne dépend pas du temps
3. Phaseur (avec valeur efficace): $\underline{U} = U e^{j\alpha}$ –> ne dépend pas du temps

Diagramme des phaseurs

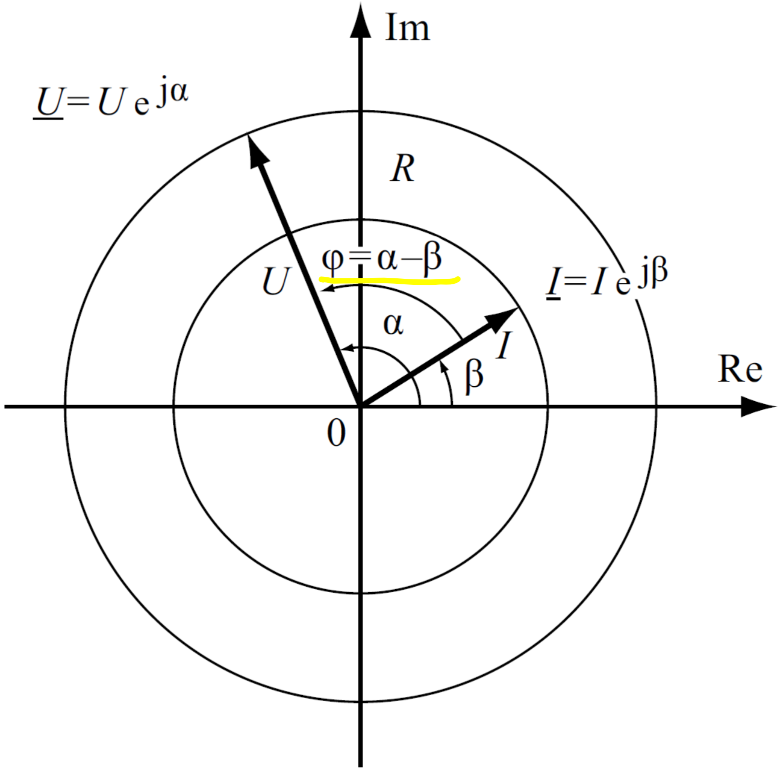
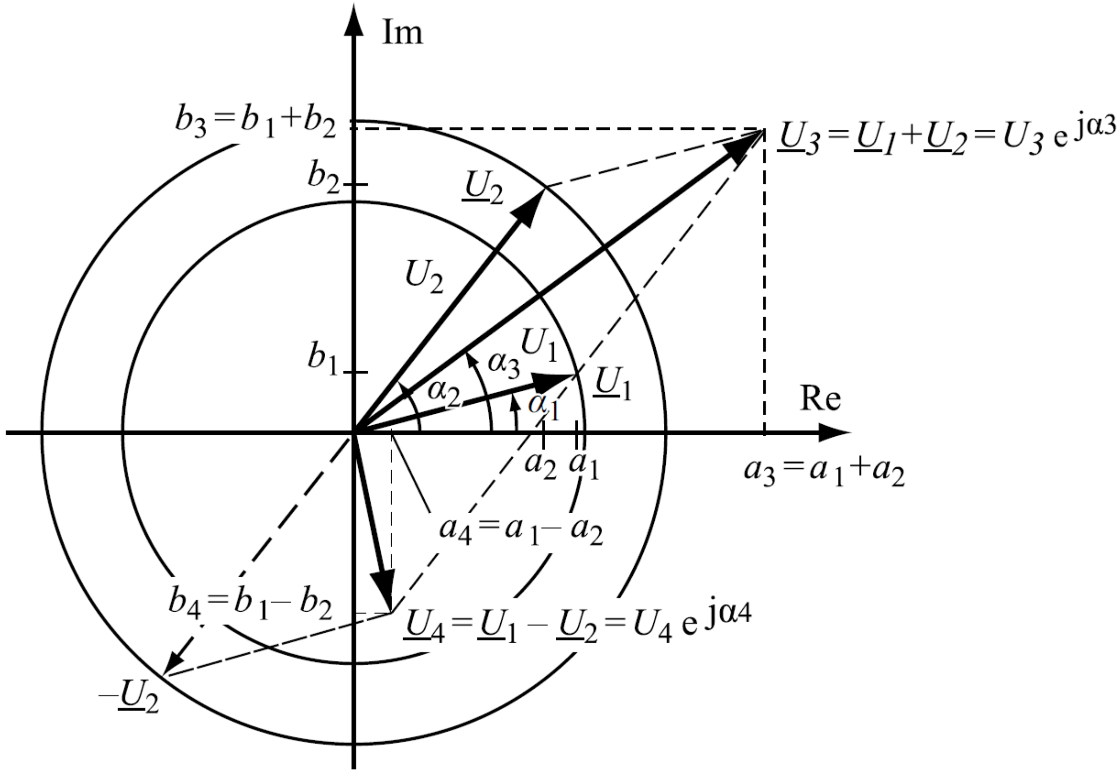
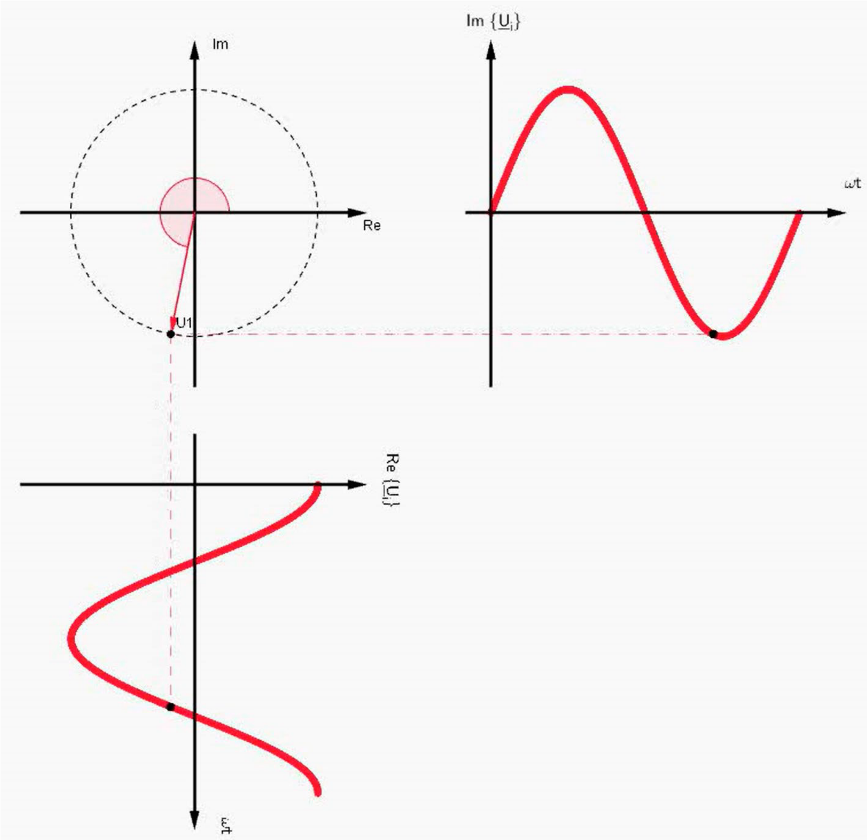


Diagramme des phaseurs



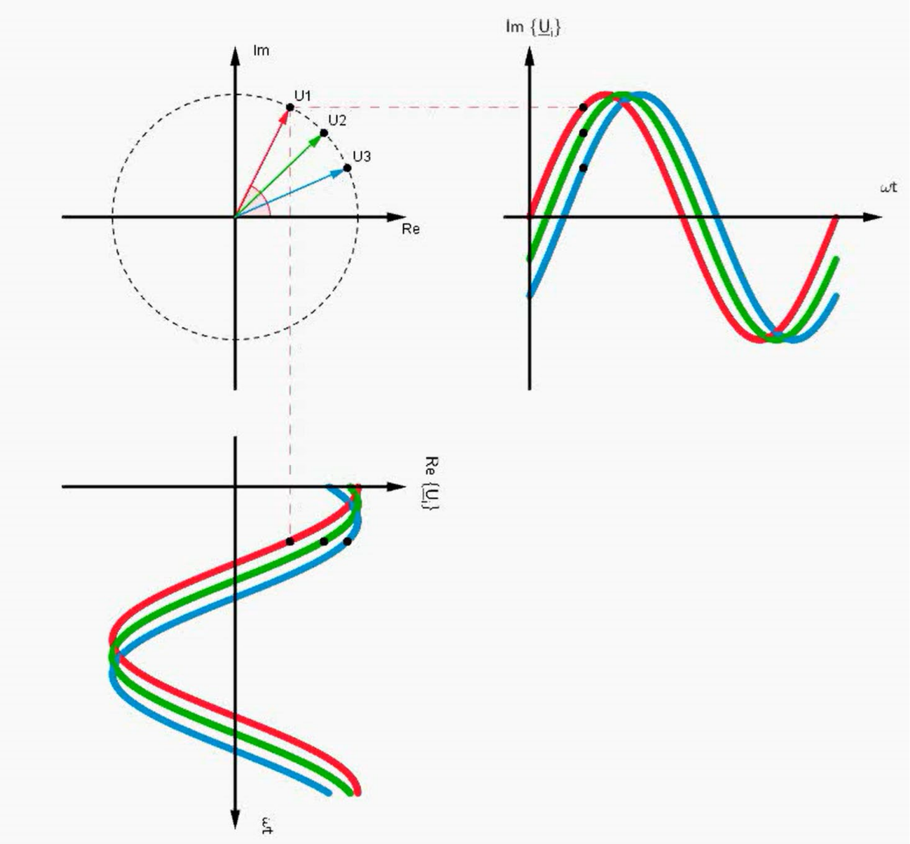
REPRÉSENTATION DE FRESNEL

- Vidéo Fresnel monophasé



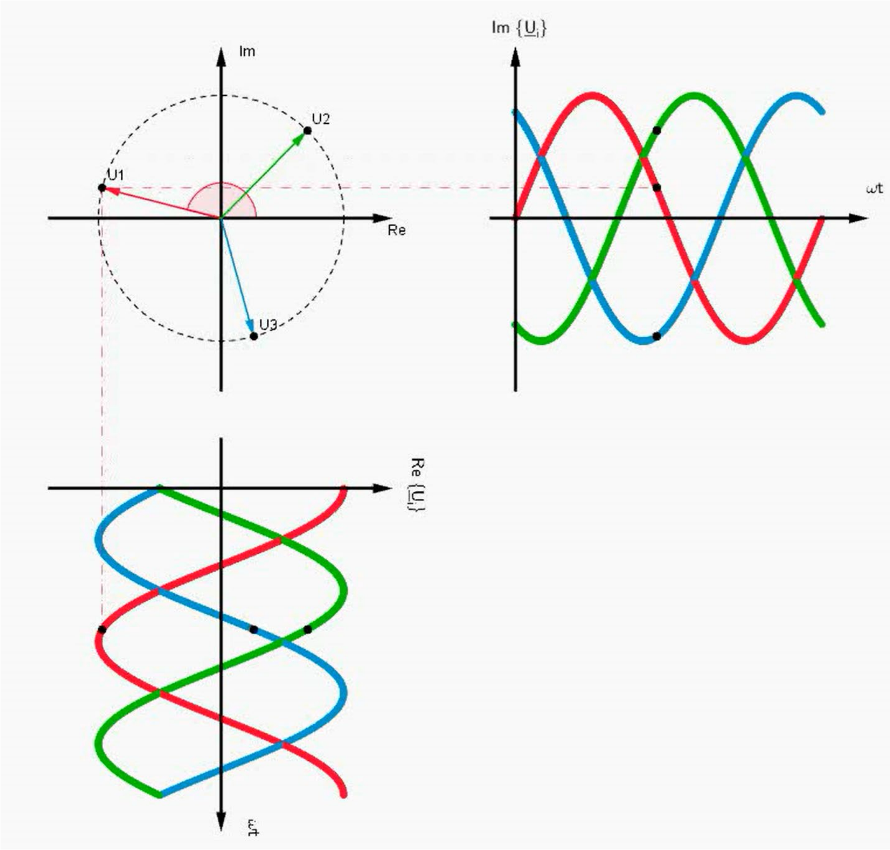
REPRÉSENTATION DE FRESNEL

- Vidéo Fresnel triphasé 20 degrés



REPRÉSENTATION DE FRESNEL

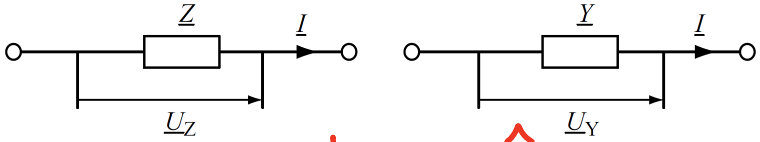
- Vidéo Fresnel triphasé 120 degrés



EPFL

Impédances et Admittances

$\underline{u} = \underline{z}\,\underline{i}$



$\underline{z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$ Impédance

$\underline{z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\beta}} = \frac{U}{I}e^{j(\alpha-\beta)} = ze^{j(\alpha-\beta)}$

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{z}}$ Admittance

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{z}e^{-j\varphi} = Ye^{-j\varphi}$

RÉSUMÉ SEMAINE 6

$$u(t) = \hat{U}\sin(\omega t + \alpha) \qquad \xRightarrow{\mathbb{C}} \qquad \underline{u} = \underline{\hat{U}}\, e^{j(\omega t + \alpha)}$$

$$i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \beta) \qquad\qquad \underline{i} = \underline{\hat{I}}\, e^{j(\omega t + \beta)}$$

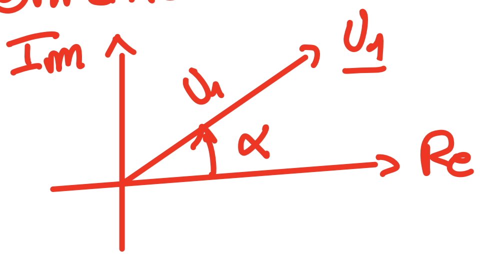
Pour simplifier les calculs, on peut utiliser les phaseurs $\underline{\hat{U}} = \hat{U}e^{j\alpha}$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{\hat{I}}} \quad \text{Impédance}$$

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi}$$

avec $|\underline{Z}| = \dfrac{U}{I}$

Représentation de Fresnel :



Somme vectorielle.

Résumé :

L'idée :

$$u = \hat{U} \sin(\omega t) \longrightarrow \underline{u} = \hat{U} e^{j(\omega t)}$$

$$u = \operatorname{Im}\{\underline{u}\} \longleftarrow$$

$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \beta) \longrightarrow \underline{i} = \hat{I} e^{j(\omega t + \beta)}$$

$$\longleftarrow$$

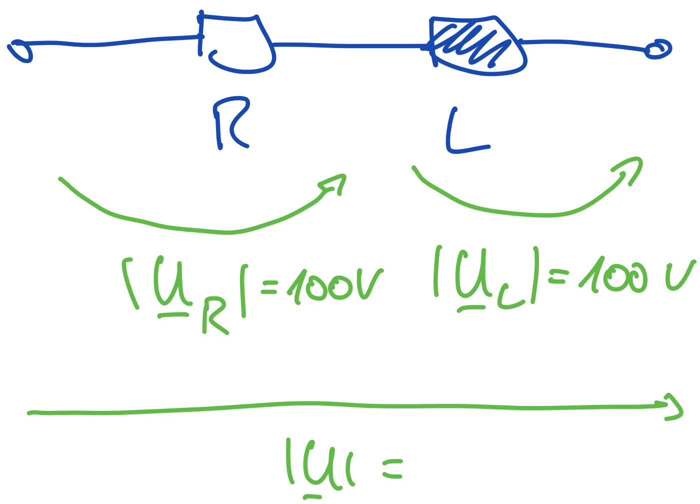
$$i = \operatorname{Im}\{\underline{i}\}$$

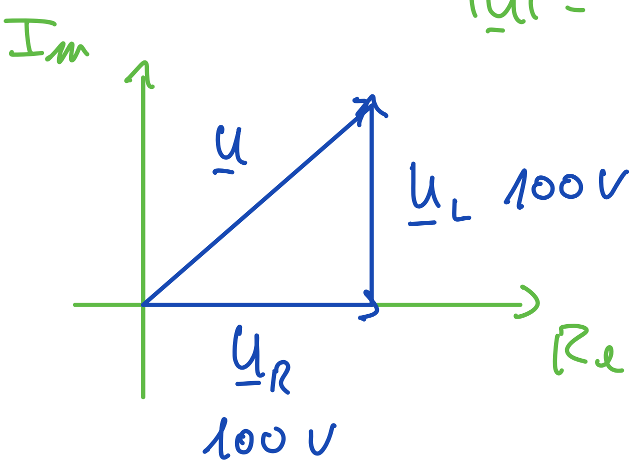
Avantage de la méthode :

$$\frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega \hat{I} e^{j(\omega t + \beta)} = j\omega \underline{i}$$

$$\int \underline{i}\, dt = \frac{1}{j\omega} \hat{I} e^{j(\omega t + \beta)} = \frac{1}{j\omega} \underline{i}$$

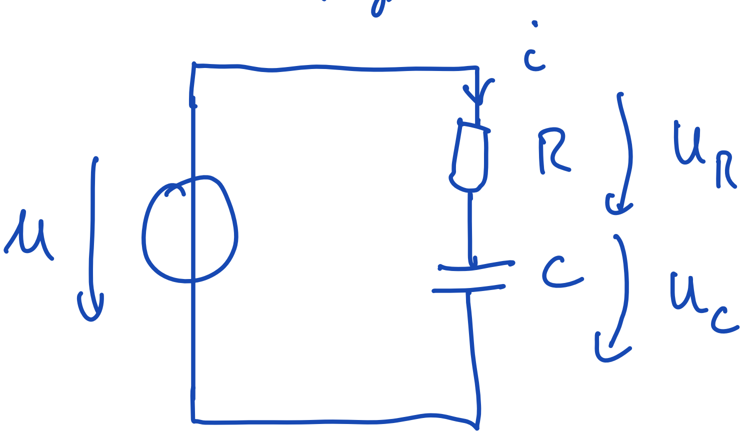
Rappel :





$$|\underline{U}| = \sqrt{100^2 + 100^2}$$

Autre Exemple :



$u = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha)$

1) Redessiner le schéma

2) Sens des tensions et courant

3) Kirchhoff

P

$$u = u_R + u_C$$

$$u_R = R \cdot i$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

$$u = R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \, dt$$

4) On passe en complexe :

$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha) \longrightarrow \underline{u} = \hat{U} e^{j(\omega t + \alpha)}$$

$$\underline{u} = R \cdot \underline{i} + \frac{1}{C} \int \underline{i} \, dt$$

5) Dériver - intégrer :

$$\int e^{j\omega t} dt \rightarrow \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}$$

$$\underline{u} = R \cdot \underline{i} + \frac{1}{j\omega C} \underline{i}$$

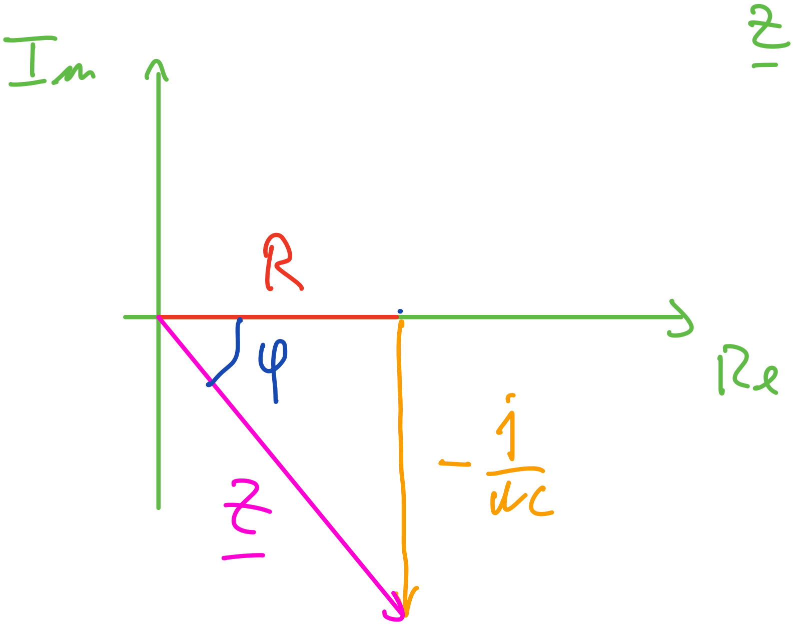
$$= \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \underline{i}$$

Impedance

$$\hat{u}\, e^{j(\omega t+\alpha)} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \hat{I}\, e^{j(\omega t+\beta)}$$

$$\hat{u}\, \cancel{e^{j\omega t}} \cdot e^{j\alpha} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \hat{I}\, \cancel{e^{j\omega t}} \cdot e^{j\beta}$$

$$\hat{u}\, e^{j\alpha} = \underbrace{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}_{\underline{Z}} \hat{I}\, e^{j\beta}$$



$$\frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$\varphi = \operatorname{Arctg}\left(\frac{-1}{R\omega C}\right)$$

$$\varphi = \alpha - \beta$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

6) Résoudre et identifier :

$$\hat{U} e^{j\alpha} = Z e^{j\varphi} \cdot \hat{I} e^{j\beta}$$

7) Solution complexe :

$$\underline{i} = \underline{\hat{I}} e^{j(\omega t + \beta)} = \frac{\hat{U}}{Z} e^{j(\omega t + \alpha - \varphi)}$$

8) Solution réelle :

$$i = \{ \mathrm{Im}\ \underline{i} \} = \frac{\hat{U}}{Z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$$

Définition :

$$\underline{u} = \hat{U} e^{j(\omega t + \alpha)}$$

valeur instantanée complexe.

$$\underline{\hat{U}} = \hat{U} e^{j\alpha}$$

phaseur de crête

$$\underline{U} = U e^{j\alpha}$$

phaseur

6.4 THE DEFINITION

Loi d'Ohm :

$$\underline{u} = \underline{z} \cdot \underline{i}$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \, \underline{I}$$

$$u = z \cdot i$$

6.4.3 Résistance et Réactance :

Impédance => $\underline{z} = z e^{j\varphi}$

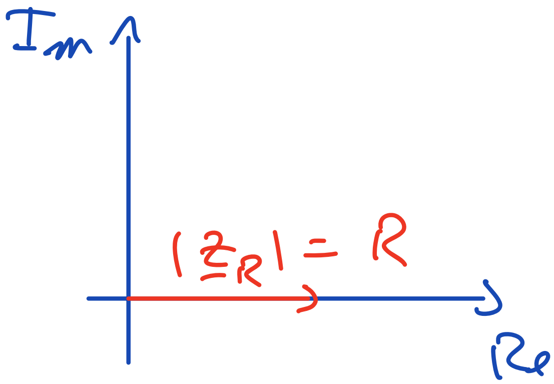
$$= z (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$\underbrace{z \cdot \cos\varphi}_{\substack{R \\ \text{Résistance}}} + \underbrace{z \, j \sin \varphi}_{\substack{jX \\ \text{Réactance}}}$$

Définition : $\dfrac{1}{\underline{z}} = \underline{y}$ admittance

6.4.4 Impédance de R

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{R\cdot\underline{I}}{\underline{I}} = R$$



$$|\underline{Z}_R| = R$$

$$\varphi_R = 0$$

$$X_R = 0$$

6.4.5 Impédance de L

$$\underline{U} = j\omega L\,\underline{I} \qquad \left(u = L\frac{di}{dt} \right)$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{j\omega L\cdot\underline{I}}{\underline{I}} = j\omega L$$

$$Z_L = \omega L$$

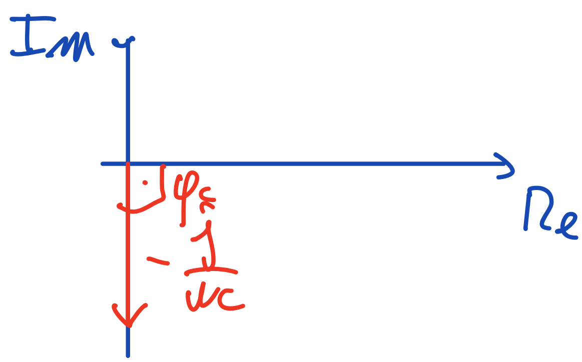
$$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$$

$$R_L = 0$$

$$X_L = \omega L$$

6.4.6 Impédance de C :

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$$

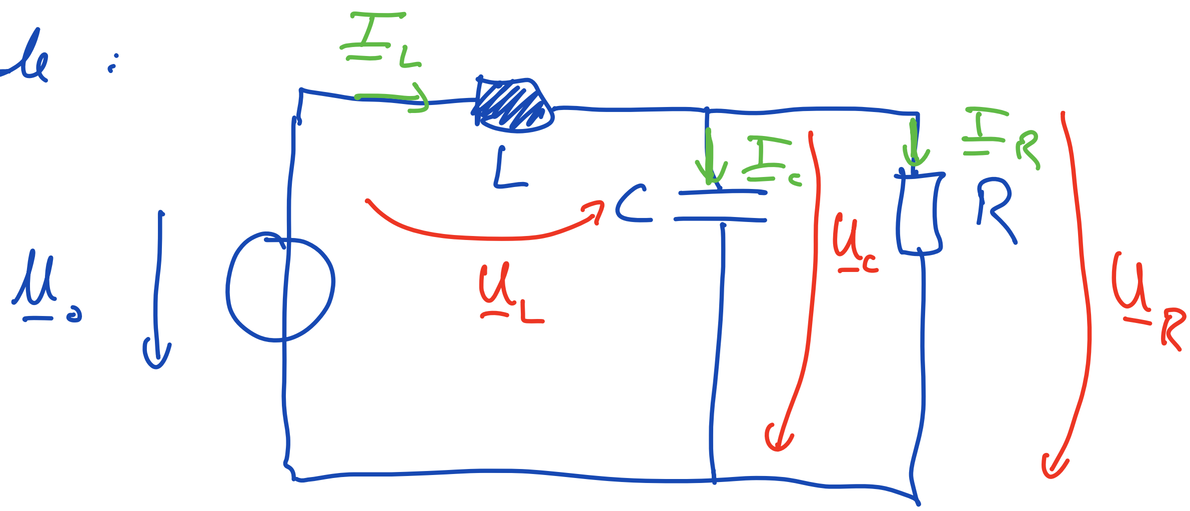


$$Z_c = \frac{1}{\omega C}$$

$$R_c = 0$$

$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$$

Exemple :



$\underline{I}_c$: connu $\rightarrow$ $\underline{U}_0$?

$$\underline{U}_c = \underline{U}_R$$

$$\underline{U}_c = \underline{Z}_c \cdot \underline{I}_c = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}_c = \underline{U}_R$$

$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R$$

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_C}{R} = -\frac{1}{\omega C R} \cdot \underline{I}_C$$

$$\underline{I}_L = \underline{I}_C + \underline{I}_R = \underline{I}_C \left(1 - j\frac{1}{\omega C R}\right)$$

$$\underline{U}_L = \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_L = j\omega L \, \underline{I}_L$$

$$= \underline{I}_C \left(\frac{L}{RC} - j\omega L\right)$$

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{I}_C \left(\frac{L}{RC} + j\omega L\right)$$

$$- j\frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}_C$$

$$\underline{U}_0 = \underline{I}_C \left[\frac{L}{RC} - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]$$

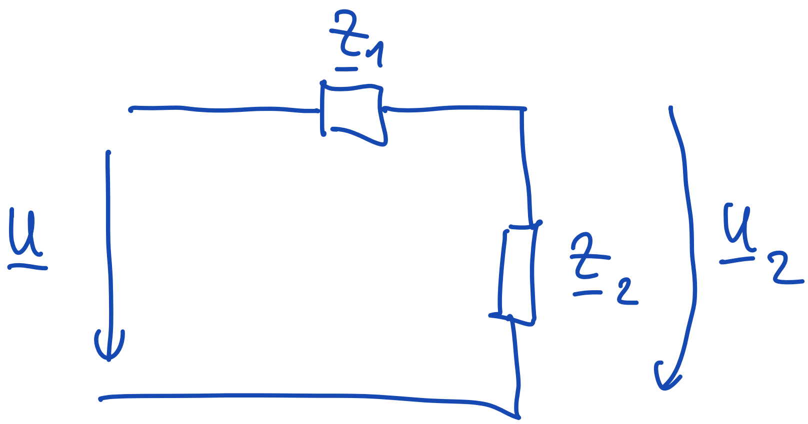
7.2.4 Tripôle équivalent :

Π – T ou ⅄ – Δ

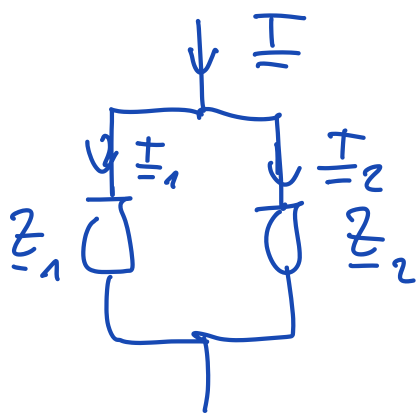
→ en complexe, identique mais vectorielle.

P. 138 Livre

7.2.5 Diviseur de tension et courant :



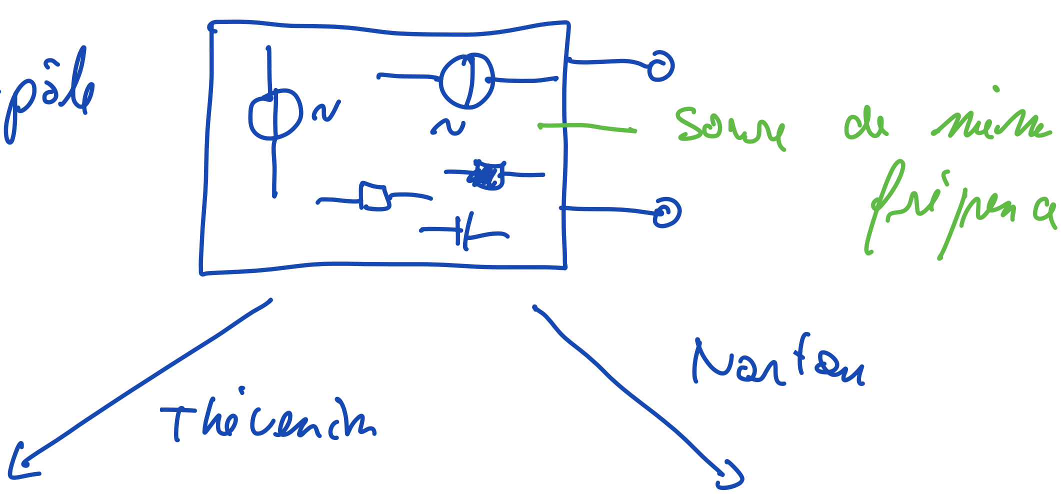
$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{U}$$

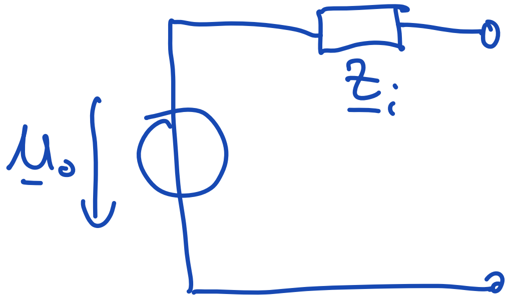


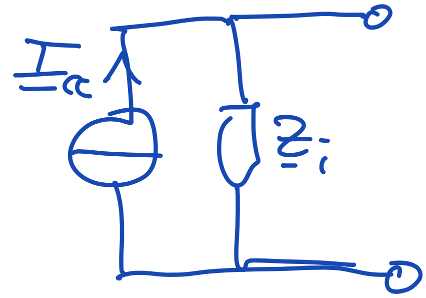
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \cdot \underline{I}$$

7.3.1 Théorèmes de Thévenin et Norton :

Dipôle







$\underline{U}_0$: Tension à vide du dipôle

$\underline{I}_{cc}$: le courant de court-circuit du dipôle

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_{cc}}$$

7.4 Principe de superposition :

Système linéaire uniquement

Cas no 1 : Toutes les sources ont même fréquence :

→ On considère chaque source séparément en annulant les autres sources :

Source No 1 → $\underline{I}_1$

" 2 → $\underline{I}_2$

$\underline{I}_{tot} = \sum^{K} \underline{I}_j$ K = nb source cas no 2 : les sources n'ont pas la même fréquence

On traite le problème par fréquence :

$$f_1 : \longrightarrow \underline{I}_{tot_1} \rightarrow i_{tot_1}(t)$$

$$i_1 = \hat{I}_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1)$$

$$f_2 : \longrightarrow \underline{I}_{tot_2} \rightarrow i_{tot_2}(t)$$

$$i_2 = \hat{I}_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2)$$

$$i_{final} = i_{tot_1}(t) + i_{tot_2}(t)$$

$$= \hat{I}_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + \hat{I}_2 \sin(\omega_2 t + \beta_2)$$